第 44 卷 第 3 期
2026 年 9 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 44, No. 3
Sept., 2026

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2026.03.04

基于 GNSS 参考源的本地频标滤波与控制方法综述

穆 磊[1,2]，胡小工[1]，张忠萍[1,3]，李 进[1,2]

(1. 中国科学院 上海天文台，上海 200030； 2. 中国科学院大学 天文与空间科学学院，北京 100049； 3. 中国科学院 空间目标与碎片观测重点实验室，南京 210008)

摘要： 该文分析了 GNSS 接收机输出的 1PPS（one pulse per second）信号的测量噪声统计特征，并系统总结了本地频标的随机漂移与噪声特性，建立了五类典型幂律噪声的统一模型；综述了各类典型测量时差噪声滤波方法，如全局最小二乘法、一阶与二阶无偏法以及卡尔曼滤波法等，并比较了它们在不同噪声条件下的适用性；讨论了多类控制策略，包括基于相位差的简化锁相控制、分段时差控制、乒乓算法、PID 控制以及基于卡尔曼滤波状态估计的最优控制方法等。该文分析了上述不同方法在结构复杂度、噪声抑制能力与动态响应方面的特点，构建了一个完整的“噪声分析-滤波处理-闭环控制”的频标驯服分析框架。

关键词： 时间频率基准；GNSS 授时；频标驯服；滤波算法；幂律噪声

中图分类号： P127 **文献标识码：** A

1 引 言

随着现代信息技术的迅猛发展，时间和频率作为基本的物理量，在电力、交通、通信、金融、航空航天及国防等众多领域发挥着核心作用[1]。相比其他物理量，时间和频率具有最高的测量准确度与稳定度，其测量技术的发展水平已成为国家综合实力与科技能力的重要标志[2]。高精度时频基准不仅是国家授时体系建设的核心基础，也是保障导航定位精度、电网运行同步性、数据中心时钟一致性以及雷达与测控系统可靠性的关键要素[3]。

现有的频率标准可按性能指标划分为一级频率标准、二级频率标准，以及其他低性能频率源[4]。其中，一级频率标准（如铯原子钟）拥有极高的长期和短期稳定度，但其成本昂贵、体积庞大，通常仅应用于国家计量机构与卫星系统等高精度授时场景。相比之下，二级频率标准（如铷原子钟和高稳晶体振荡器）成本低、体积小、功耗低，在通信、航空航天、仪器仪表等工程应用中更为普及[5]；然而，由于其固有的长期漂移特性，单独使用二级频率标准已

收稿日期： 2025-12-24； **修回日期：** 2026-01-13

资助项目： 国家自然科学基金重点项目 (42530114)；中国科学院战略性先导科技专项 (XDA0350403)

通讯作者： 胡小工，hxg@shao.ac.cn

难以满足近年来工程应用对高精度时频稳定度不断提升的需求[6]。表 1 总结了常见频率标准源的性能指标，可见不同类型的标准在准确度方面存在显著差异。

表 1　各频率标准源准确度指标表

频率标准类型	频率标准型号	频率准确度
石英晶体频率标准	普通型	10^{-5}
	温度补偿型	$10^{-6} \sim 10^{-8}$
	单层恒温型	$10^{-7} \sim 10^{-9}$
	双层恒温型	$10^{-8} \sim 10^{-10}$
原子钟频率标准	铷原子（^{87}Rb）频率标准	$10^{-10} \sim 10^{-11}$
	氢原子（H）频率标准	$10^{-12} \sim 10^{-13}$
	商品型铯原子（^{133}Cs）频率标准	$10^{-12} \sim 10^{-13}$
	实验室型铯原子（^{133}Cs）频率标准	$10^{-14} \sim 10^{-15}$

在传统时频系统中，高一级频率标准通常用于驯服和校准低一级频标，例如利用大铯钟的长期稳定度来提升铷钟或高稳晶振的性能[7]。然而，这种驯服体系高度依赖昂贵且难以普及的高性能原子钟，不利于在大规模工程系统中部署，并限制了高精度时频基准的普惠化应用。近年来，全球卫星导航系统（Global Navigation Satellite System, GNSS）迅速发展并逐渐成熟，其在授时、导航与同步等领域的应用愈加广泛[8]。GNSS 能够提供高精度的时间频率参考信号，其长期稳定度与准确度通常可达到 $10^{-12} \sim 10^{-15}$ 量级，为利用 GNSS 替代传统高性能原子钟作为参考源提供了可行方案[9]。因此，利用 GNSS 时频信号对本地频率标准进行驯服，逐渐成为一种覆盖范围广、成本可控、性能突出的解决方案，受到越来越多研究与工程系统的关注[10]。

在实际应用中，用户通常通过 GNSS 授时接收机接收卫星下发的导航电文，对伪距、载波相位等量进行测量，并结合卫星星历和钟差信息解算本地接收机的钟差，从而获得相对于 GNSS 系统时间的时频误差信息。GNSS 接收机利用该误差信息对其内部基准晶振进行校准，并输出具有高长期稳定度的 1PPS（及/或 10 MHz）参考信号[11]。然而，GNSS 信号在空间传播及接收机处理过程中会受到多类误差影响，包括大气传输效应、相对论效应、对流层延迟、电离层延迟等。此外，接收机在信号解调、环路跟踪及观测量生成阶段也会叠加若干测量噪声[12]。上述因素虽然不影响 GNSS 系统时间的长期稳定度，但其短期相位噪声较大，若不加处理直接用于本地频标驯服，则会大大降低系统的短期稳定度[13]。

因此，基于 GNSS 的频标系统必须解决两个关键问题：一是通过合理的噪声建模与滤波算法抑制 GNSS 接收机输出的 1PPS 信号的短期噪声；二是设计稳健有效的控制策略，使得频标在保持短期稳定度的同时实现长期漂移校准[14]。

基于上述背景，本文作为综述类工作，将从三个方面系统展开讨论：（1）分析 GNSS 参考源与本地频率标准的噪声特性，包括功率谱特征、频率漂移与幂律噪声模型；（2）综述卡尔曼滤波、最小二乘滤波、改善滑动平均滤波等算法在频标噪声抑制中的原理与适用范围；（3）讨论典型频率驯服控制算法的设计方法、参数配置与工程表现。本文旨在通过对噪声建模、滤

波策略与控制方法的系统分析，为基于 GNSS 的频率标准系统提供全面的理论参考与工程设计指引。

2 噪声分析

高性能频标的滤波与控制设计均以噪声特性的准确建模为基础，因此在开展滤波与控制策略讨论之前，有必要先对 GNSS 参考源与本地频率标准的噪声组成及其统计特性进行系统分析[15]。

2.1 GNSS 接收机时频信号噪声分析

高精度 GNSS 授时接收机广泛用于时频系统的同步与校准，其输出的 1PPS（及 10 MHz）信号通常作为本地频率标准比对与频差估计的参考。因此，研究接收机时频输出的噪声特性是频标驯服算法研究的重要基础[16]。

从授时原理来看，GNSS 单向授时（包括单星与多星）依赖伪距观测量、导航电文、卫星星历以及多种误差改正模型来解算本地接收机的钟差。现代授时接收机通常采用多频观测，可通过无电离层组合显著削弱电离层一阶延迟；然而，高阶电离层项、多路径效应及建模误差仍然会影响最终的授时精度。因此，GNSS 时频输出的误差主要来源于以下几类因素：

(1) 卫星相关误差：星历误差、卫星钟差模型误差等；
(2) 传播路径误差：电离层延迟、对流层延迟、多路径效应等；
(3) 接收机内部误差：环路跟踪噪声、量化噪声、天线相位中心变化、硬件延迟等；
(4) 其他误差：相对论效应、地球自转效应等。

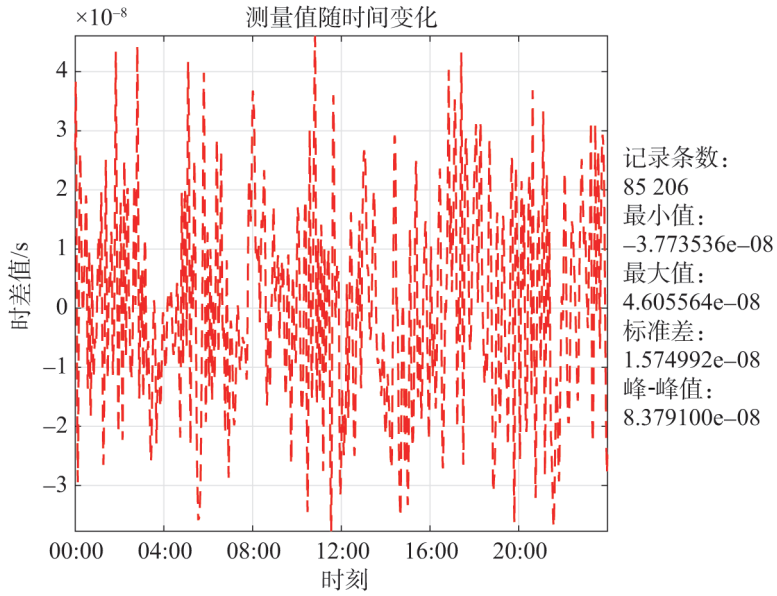
这些误差在长时间尺度上可通过模型或平均化抑制，但在短时间尺度上会表现为相位抖动，使得 GNSS 输出的 1PPS 信号短期稳定度受限。若直接将其用于频标驯服，会使本地晶体振荡器的短期稳定度降低[17]。因此，实际系统与相关研究普遍需要在 GNSS 时差序列上引入滤波、平滑与估计方法，以提取其长期趋势成分并抑制短期噪声，这也为后续频率估计与控制算法奠定基础。

实际操作时，为评估 GNSS 接收机的噪声水平，常使用两台相同型号的高精度授时接收机，将其 1PPS 输出信号输入统一的时差测量设备（Time Interval Error, TIE）进行相互比较，从而得到接收机噪声的统计特性[18]。由于环境扰动、信号遮挡以及接收机内部状态变化，原始 1PPS 时差序列中往往包含各类异常观测，包括孤立的离群点以及由信号中断或状态切换引起的跳变段。因此，通常需要对观测序列进行预处理。本文将上述非正常观测统称为异常点，并采用 MATLAB 的 `isoutlier` 等工具对离群点进行初步检测与剔除，同时结合时差序列的突变特征进一步识别并去除异常段，从而获得连续、可靠的时差信号[19]。对清洗后的序列进行标准差（standard deviation, STD）、峰-峰值及最大最小值等统计分析，可用于量化接收机的短期噪声水平。若两台同型号接收机相互比较且误差互不相关，则单台接收机的标准差 σ 可表示为：

$$\sigma = \frac{R}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

其中 R 为互比结果的 STD。

图 1 展示了两台较高性能的全频段 GNSS 授时接收机的 1PPS 输出时差通过 SR620 互比的 STD 水平，实测约一天时间，互比精度优于 16 ns (1σ)。单台接收机的精度约为 10 ns，结果表明 GNSS 信号源可以为频率驯服系统提供良好的长期基准，但在短时间尺度上仍受到多类噪声的影响[20]。



注：该图为两台全频段 GNSS 接收机在上海天文台（徐汇园区）实测结果，两个独立天线架设于园区附楼楼顶

图 1　GNSS 的 1PPS 信号互比结果

2.2 频标的噪声模型与随机过程特性

2.2.1 频域视角：幂律噪声模型

高稳晶体振荡器、铷钟等二级频率标准在运行过程中会受到多类随机噪声源的影响[21]，其输出的相位与频率偏差通常可视为若干连续随机过程的叠加[22]。这些随机过程具有典型的非平稳特性，其频率噪声功率谱密度（power spectral density, PSD）在不同频率范围内常呈现 $S_y(f) \propto f^{\alpha}$ 的幂律行为[23]。

在频域中，这类噪声一般采用幂律噪声（power-law noise）模型进行描述，其 PSD 可表示为：

$$S_y(f) = h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0 f^0 + h_1 f^1 + h_2 f^2, \tag{2}$$

其中，f 为频率偏移，h_α 为对应噪声强度系数。不同的幂律指数 α 对应不同的物理噪声机制，$\alpha = -2, -1, 0, +1, +2$ 分别对应随机游走频率噪声（RWFM）、闪烁频率噪声（FFM）、白频率噪声（WFM）、闪烁相位噪声（FPM）和白相位噪声（WPM）。

这些噪声类型可通过对白噪声过程进行积分或微分构造而得，因此可采用统一的随机微

分方程框架进行建模[24]。幂律噪声模型是分析频率标准随机特性以及设计滤波器（如卡尔曼滤波的过程噪声矩阵）的基础。

2.2.2 时域视角：Allan 方差特性

由于幂律噪声过程通常为非平稳序列，难以直接由原始时域数据评估其稳定度，因而频率计量领域普遍采用 Allan 方差（Allan variance, AVAR）表征频率标准在不同时间尺度下的稳定度。Allan 方差 $\sigma_y(\tau)$ 与功率谱密度（PSD）幂律指数 α 的关系为：

$$\sigma_y(\tau) \propto \tau^{\mu/2}, \qquad \mu = -(\alpha + 1). \tag{3}$$

据此，不同噪声类型在 log–log Allan 方差图中的理论斜率分别为：随机游走频率噪声为 $+1/2$，闪烁频率噪声为 0，白频率噪声为 $-1/2$，闪烁相位噪声与白相位噪声均为 -1，对应关系如表 2 所示。

表 2　五种典型频率噪声类型及其频域与时域特性

噪声类型	PSD 幂律指数 α	Allan 方差斜率 $\mu/2$	特征描述
RWFM（随机游走频率噪声）	-2	$+1/2$	长期随机游走主导
FFM（闪烁频率噪声）	-1	0	典型 $1/f$ 频率闪烁
WFM（白频率噪声）	0	$-1/2$	常见中频白噪声
FPM（闪烁相位噪声）	$+1$	-1（含对数修正项）	高频相位闪烁噪声
WPM（白相位噪声）	$+2$	-1（理论值 $-3/2$，ADEV 中被混叠）	高频白相位噪声

2.3 幂律噪声的仿真方法与时频特性验证

为验证幂律噪声模型在频率标准随机过程建模中的适用性，常通过数值仿真生成不同类型的相位噪声或频率噪声序列，并以此分析其时域与频域特性。典型的五类噪声均可通过对白噪声过程进行积分、微分或滤波得到。图 2 分别展示了五种噪声的 Allan 偏差特征。其中，FPM 与 WPM 在 Allan 方差图中表现一致[25]，这是由于 AVAR 对高频相位噪声的混叠效应所致；若需区分二者，可进一步采用 Modified Allan Variance（DEV）。此外，如图 3 所示，将五类噪声叠加后得到的综合 Allan 方差呈现典型的“盆型曲线”，反映了不同时间尺度下噪声主导机制的相互转换：短期由相位噪声主导，中期主要受频率噪声影响，而长期则由随机游走成分主导[26]。本仿真中直接生成相位序列，并基于其二阶差分计算 Allan 方差，以验证噪声的幂律斜率是否与理论一致[27]。对于相位噪声类（WPM、FPM），可通过对白噪声施加不同的频域谱整形滤波器构造；对于频率噪声类（WFM、FFM、RWFM），则通过对白噪声进行一次或两次积分来构成相位序列。通过控制噪声强度系数 h_α，可以模拟不同频率标准在不同时间尺度下的主导噪声成分，并计算其在不同相关时间 τ 下的 Allan 方差。图 4 所示为 Allan 方差在 log-log 坐标系中的斜率。数值仿真结果表明，五类噪声的 Allan 方差曲线与理论斜率高度一致，进一步验证了幂律噪声模型的有效性。该仿真方法不仅可用于解释频率标准在不同时间尺度下的噪声特性，还可为滤波算法的噪声参数设定提供依据，并为后续频率驯服与保持策略的设计提供重要参考。

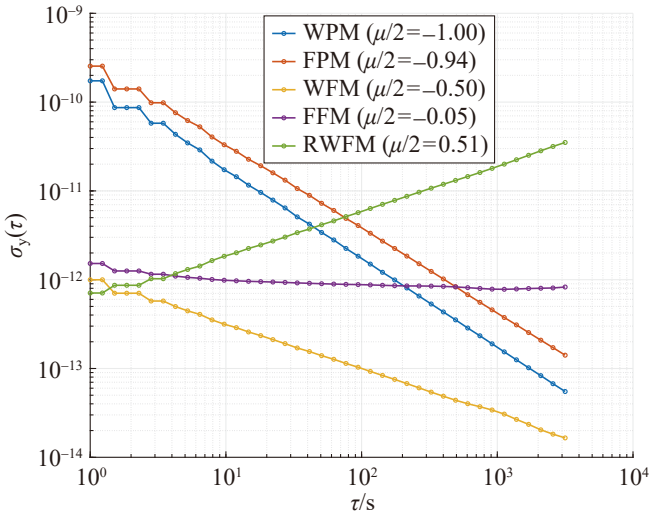


图 2　五种噪声的 Allan 方差特征

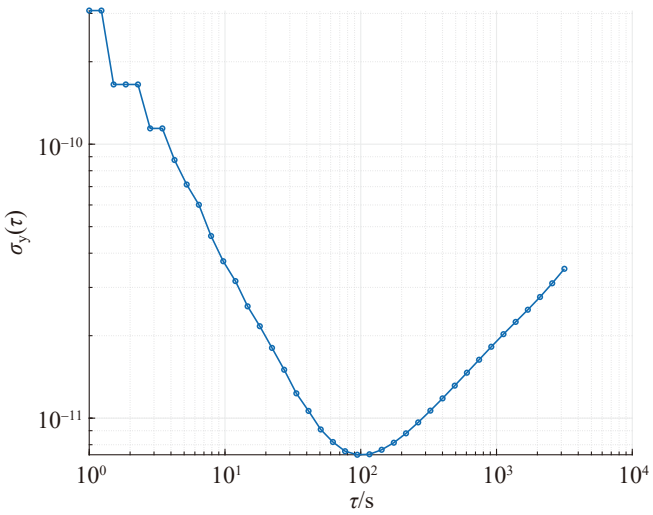


图 3　五种噪声的 Allan 方差盆型曲线

3　滤波算法研究

前一章分析了 GNSS 参考源与本地频率标准的噪声组成及统计特性。为了在频标驯服之前有效降低时差序列中的测量噪声并提升估计精度，有必要引入适当的滤波方法。用于频标预处理的滤波方法大致可分为五类：全局最小二乘（LS）法、无偏有限脉冲响应（finite impulse response, FIR）法、滑动窗口滤波（optimal polynomial trend moving average, OPTMA-1 与二阶 FIR），以及局部多项式拟合的 Savitzky-Golay（SG）滤波法、卡尔曼滤波法（KF）[28]。

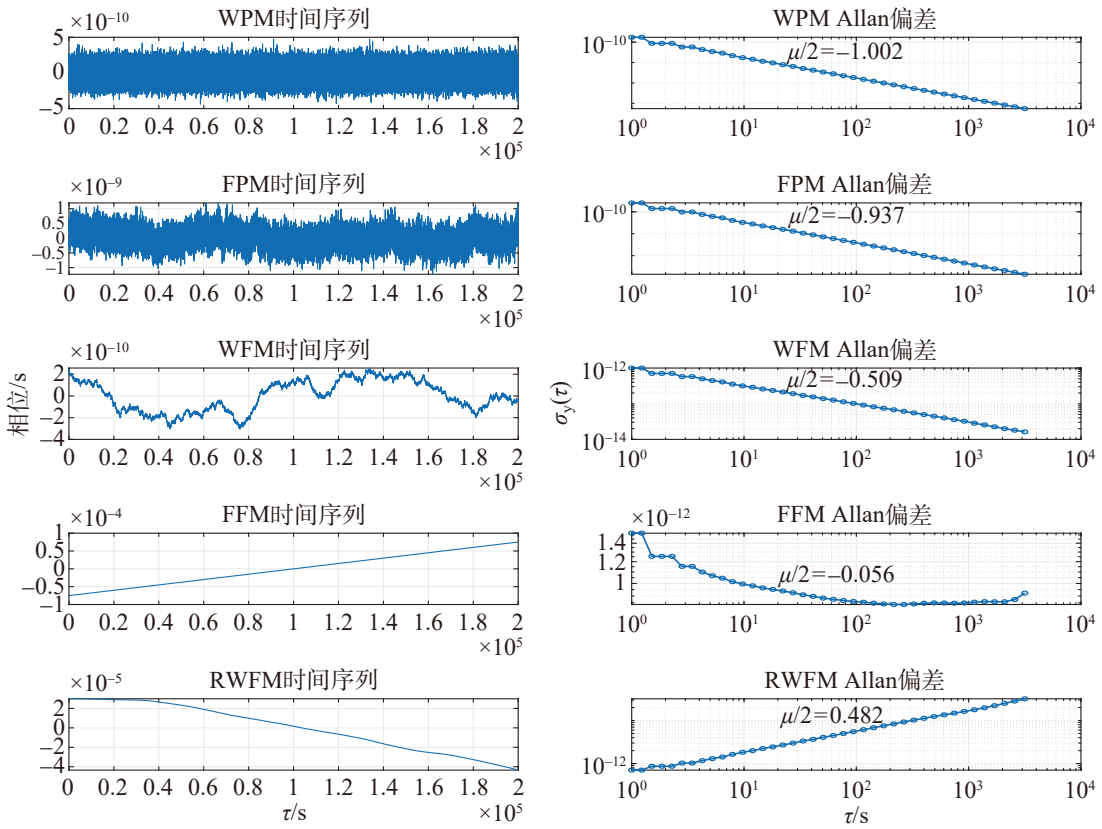


图 4　数值仿真生成不同类型的噪声

本章将依次介绍上述五种滤波算法，并在统一的数值仿真环境下比较其性能表现，以分析不同方法在 GNSS 基准信号噪声抑制中的适用场景。仿真中，本地频标的相位漂移采用二次多项式模型：

$$x_{\text{trend}}(t) = X_0 + X_1 t + \frac{1}{2}X_2 t^2, \qquad X_0 = 0,\ X_1 = 10^{-10},\ X_2 = 10^{-12}, \tag{4}$$

其中，X_0、X_1 和 X_2 分别表示初始相位偏差、频率偏差与频率漂移率，用以模拟高稳晶振在数千秒时间尺度内的典型漂移趋势。

为反映本地频率标准的随机噪声特性，仿真叠加了五类典型幂律噪声，其统一叠加形式为：

$$x_{\text{noise}}(t) = x_{\text{WPM}} + x_{\text{FPM}} + x_{\text{WFM}} + x_{\text{FFM}} + x_{\text{RWFM}}. \tag{5}$$

由二次趋势项与随机噪声项共同构成真实相位序列：

$$x_{\text{true}}(t) = x_{\text{trend}}(t) + x_{\text{noise}}(t). \tag{6}$$

为模拟实际 GNSS 1PPS 输出的测量特性，在观测过程中进一步叠加零均值高斯测量噪

声，得到观测序列：

$$z(t) = x_{\text{true}}(t) + v(t), \tag{7}$$

其中，$v(t)$ 表示测量噪声，假设其服从零均值高斯分布，标准差设置为 $\sigma_{\text{meas}} = 20\,\text{ns}$，用于模拟 GNSS 1PPS 信号的实际测量不确定度。仿真采样间隔设为 1 s，总长度为 10^4 个采样点。上述模型能够同时体现本地频标的长期漂移特性、幂律噪声主导的中低频统计特性以及 GNSS 测量噪声主导的高频扰动，为不同滤波算法在统一数据集下的系统比较提供基础[29]。

3.1 基于多项式拟合的全局最小二乘法（LS）

在基于 GNSS 的频率标准校准中，本地频标的相位或时差序列在有限时间尺度内通常可用低阶多项式近似，其主要成分包括初始相位偏差、频率偏差以及由老化和环境变化引起的线性频率漂移[30]。记观测到的连续时差序列为：

$$z(k) = x(k) + v(k), \qquad k = 1, 2, 3 \ldots, N, \tag{8}$$

其中，$z(k)$ 为第 k 个时刻的时差观测值，$x(k)$ 为真实相位（或时差），$v(k)$ 为测量噪声。根据频标误差模型，在短时间尺度内可用二次多项式近似表示：

$$x(k) \approx \beta_0 + \beta_1 t_k + \frac{1}{2}\beta_2 t_k^2, \tag{9}$$

其中 t_k 为时间索引，β_0、β_1、β_2 分别对应初始相位偏差、频率偏差与频率漂移率。将 N 个样本写成矩阵形式可得：

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{H\beta} + \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \frac{1}{2}t_1^2 \\ 1 & t_2 & \frac{1}{2}t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N & \frac{1}{2}t_N^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 分别为观测向量与噪声向量，$\boldsymbol{H}$ 为设计矩阵。

最小二乘法通过最小化残差平方和并给出闭式解，从而得到全局趋势估计：

$$\boldsymbol{J} = \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H\beta}\|^2, \qquad \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}, \qquad \hat{x}(k) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t_k + \frac{1}{2}\hat{\beta}_2 t_k^2, \tag{11}$$

用于描述整个时差序列的全局趋势。

3.2 基于滑动窗口的无偏 FIR 滤波

3.2.1 一阶无偏滑动平均法（OPTMA-1）

在 GNSS 频标校准的预处理阶段，滑动平均（moving average, MA）由于实现简单、对高频噪声具有良好抑制能力，常作为时差序列的平滑手段[31]。然而，传统滑动平均在存在线性趋势（如频率偏差）时会引入系统性偏差，即输出的平均值无法准确反映当前时刻的真实相位，尤其当窗口长度增大时偏差更加明显。为解决这一问题，一阶无偏滑动平均（OPTMA-1）通过设计特殊权系数，使得在存在线性趋势时滤波器仍保持无偏，成为频标驯服中常用的低阶无偏 FIR 滤波器之一。

设滑动窗口长度为 N_w，传统滑动平均的输出为：

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{N_w}\sum_{i=0}^{N_w-1} z(k-i), \tag{12}$$

其中，$z(k)$ 为观测值。若真实信号包含线性趋势 $x(k) = a_0 + a_1 k$，则其数学期望为：

$$\mathbb{E}[\hat{x}(k)] = a_0 + a_1\left(k - \frac{N_w-1}{2}\right), \tag{13}$$

表明传统滑动平均对线性项 $a_1 k$ 引入 $\frac{N_w-1}{2}$ 的系统性偏差，难以直接用于频标控制。

为实现无偏估计，OPTMA-1 通过构造权向量 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{N_w}$，并施加一阶无偏约束：

$$\sum_{i=0}^{N_w-1} w_i = 1, \qquad \sum_{i=0}^{N_w-1}\left(i - \frac{N_w-1}{2}\right) w_i = 0. \tag{14}$$

在此基础上，OPTMA-1 选择在所有满足约束的权向量中，使滤波器输出方差最小的那一组权值。上述约束优化问题的解析解为：

$$w_i = \frac{2(2N_w-1)-6i}{N_w(N_w+1)}, \qquad i = 0, 1, \cdots, N_w-1. \tag{15}$$

该权向量呈线性递减结构，较新的样本具有更高权重，能够有效消除线性趋势引入的偏差，并较传统滑动平均更准确地反映信号在当前时刻的真实取值。

OPTMA-1 的滤波输出可写为：

$$\hat{x}(k) = \sum_{i=0}^{N_w-1} w_i\, z(k-i), \tag{16}$$

其中，$z(k)$ 为时差观测序列。

3.2.2 二阶无偏 FIR 滤波法

在实际频标建模中，相位随时间的变化通常包含常值项、一阶频率偏差以及由老化或温度变化引起的线性频率漂移。因此，相位误差在短时间尺度内可以近似表示为二次多项式形式。为在去除测量噪声的同时保持二次趋势项无偏，二阶无偏有限脉冲响应滤波器（second-order unbiased FIR, FIR2）被广泛采用[32]。

二阶无偏 FIR 的基本思想是，构造一组长度为 N_w 的权向量 $\boldsymbol{w} = [w_0, w_1, w_2, \cdots, w_{N_w-1}]^{\mathrm{T}}$，对观测序列进行线性组合：

$$\hat{x}(k) = \sum_{i=0}^{N_w-1} w_i\, z(k-i), \tag{17}$$

并要求其对以窗口中心 $\bar{i} = (N_w-1)/2$ 为参考点的二次多项式趋势完全无偏，即满足：

$$\sum_{i=0}^{N_w-1} w_i = 1, \quad \sum_{i=0}^{N_w-1}(i-\bar{i})w_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{N_w-1}(i-\bar{i})^2 w_i = 0. \tag{18}$$

将上述无偏约束写为矩阵形式可得：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}, \tag{19}$$

其中，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (i_0 - \bar{i}) & (i_1 - \bar{i}) & \cdots & (i_{N_w-1} - \bar{i}) \\ (i_0 - \bar{i})^2 & (i_1 - \bar{i})^2 & \cdots & (i_{N_w-1} - \bar{i})^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中，$i_j = j\Delta t$ 表示窗口内第 j 个采样点对应的时间索引，Δt 为采样间隔，本文中取 $\Delta t = 1$。

3.3 基于局部多项式拟合的 Savitzky–Golay（SG）滤波

Savitzky–Golay（SG）滤波是一类基于局部多项式最小二乘拟合的平滑方法。与采用固定权向量的无偏 FIR 滤波器（如 OPTMA-1 和 FIR2）不同，SG 滤波在每个滑动窗口内对信号进行局部拟合，从而在抑制测量噪声的同时更好地保持趋势项的形状特征。

设滑动窗口长度为 M（奇数），中心点为 k，窗口内采样序列为 z_{k-j}，其中 $j = -K, \cdots, K$ 且 $K = (M-1)/2$。SG 滤波假设信号在该窗口内可由 d 阶多项式近似：

$$x(t) \approx a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d, \tag{21}$$

并通过局部最小二乘求解多项式系数

$$\hat{a} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} z, \tag{22}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为由相对时间索引 $j = -K, \cdots, K$ 构成的 Vandermonde 矩阵。SG 滤波的输出取为窗口中心点处的估计值 $\hat{x}_k = \hat{a}_0$，等效地可写为 FIR 形式

$$\hat{x}_k = \sum_{j=-K}^{K} c_j z_{k-j}, \tag{23}$$

其中权向量 $\boldsymbol{c}$ 由最小二乘解自动确定，表明 SG 滤波本质上是一类“由局部最小二乘法构造的无偏 FIR”滤波器。

本文仿真中采用 MATLAB 内置的 Savitzky–Golay 滤波函数 `sgolayfilt`，配置为二阶多项式拟合并使用 $M = 101$ 点滑动窗口。该设置能够完整保留至二次的趋势项，其趋势保持能力与二阶无偏 FIR（FIR2）相当；同时，由于滤波权系数由局部最小二乘过程自适应生成，在数值稳定性和抗噪性能方面具有更好的稳健性[33]。

3.4 基于状态空间建模的卡尔曼滤波（KF）

卡尔曼滤波是一种最优线性估算方法，能够在已知系统动态模型与测量噪声统计特性的前提下，递推得到状态量的最小方差估计[34]。在频标驯服场景中，本地振荡器的相位、频率与漂移之间具有明确的积分关系，属于典型的线性高斯系统，因此非常适合采用 KF 建模与估算[35]。

在本文模型中，本地频标误差由相位偏差 $x(k)$、频率偏差 $y(k)$ 和漂移率 $d(k)$ 构成，状态向量定义为：

$$\boldsymbol{X}(k) = \begin{bmatrix} x(k) & y(k) & d(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{w}(k), \tag{24}$$

其中，状态转移矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为相位-频率-漂移率一阶、二阶积分过程的离散化形式。该状态空间模型能够自然刻画频标误差的时间演化特性：在振荡器长期稳定条件下，$y(k)$ 与 $d(k)$ 保持较小，而当老化、温度或电压扰动存在时，系统可通过过程噪声 $\boldsymbol{w}(k)$ 对其变化进行自适应跟踪[36]。

过程噪声协方差 $\boldsymbol{Q}$ 的设定。过程噪声 $\boldsymbol{w}(k)$ 用于描述本地振荡器内部频率偏移的不可建模部分，如温度波动、老化、负载变化导致的随机频率漂移。在工程实践中，$\boldsymbol{Q}$ 的取值大小决定 KF 对系统动态的“敏感程度”：

(1) 若 $\boldsymbol{Q}$ 较小，滤波器假设振荡器非常稳定，则滤波结果更平滑，但响应速度较慢；

(2) 若 $\boldsymbol{Q}$ 较大，滤波器允许状态快速变化，能够跟踪频率扰动，但输出噪声会变大。

本文选择

$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(10^{-20}, 10^{-22}, 10^{-26}), \tag{25}$$

原因在于相位项的累积特性最明显，需要较大的过程噪声用于跟踪漂移；频率和漂移项变化较慢，因此其过程噪声较小。这种结构与高稳晶振的噪声特性一致：相位噪声最强，频率噪声次之，漂移变化最慢。

测量噪声方差 $\boldsymbol{R}$ 的设定。 GNSS 1PPS 的输出受电离层、对流层、接收机环路噪声等因素影响，其短期测量不确定度通常为数十纳秒量级。本文仿真中将观测噪声 $\boldsymbol{v}(k)$ 建模为零均值高斯随机过程，并设置其标准差为 $\sigma_{\mathrm{meas}} = 20\,\mathrm{ns}$，以模拟实际 GNSS 1PPS 授时观测中的测量误差。

该设置对应于商业级 GNSS 授时接收机的典型性能特征：当测量噪声较大时，卡尔曼滤波（KF）更依赖基于系统模型的预测结果；当测量噪声较小时，则更倾向于信任观测数据本身。具体而言，KF 通过状态转移矩阵 $\boldsymbol{F}$ 描述“相位-频率-漂移”之间的物理演化关系，通过测量噪声协方差 $\boldsymbol{R}$ 评估 GNSS 观测的可靠性，并通过过程噪声协方差 $\boldsymbol{Q}$ 刻画本地频标状态可能发生的随机变化，从而在模型预测与观测信息之间实现最优权衡。

预测步骤表示为：

$$\hat{x}^{-}(k) = \boldsymbol{F}\hat{x}(k-1), \tag{26}$$

$$P^{-}(k) = \boldsymbol{F}P(k-1)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}. \tag{27}$$

更新步骤表示为：

$$K(k) = P^{-}(k)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}P^{-}(k)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}\right)^{-1}, \tag{28}$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}^{-}(k) + K(k)\left(z(k) - \boldsymbol{H}\hat{x}^{-}(k)\right), \tag{29}$$

$$P(k) = \left(I - K(k)\boldsymbol{H}\right)P^{-}(k). \tag{30}$$

滤波器的输出相位估计为：

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k)_{(1)}. \tag{31}$$

KF 的核心优势在于，它不仅利用模型降低噪声，还能根据 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的相对大小自动调节对预测和观测的信任程度，从而在短期噪声强烈、频率状态随时间缓慢变化的频标场景中取得良好的动态估计性能。卡尔曼滤波在工程实践中还具有多种扩展形式，例如用于处理非线性系统的扩展卡尔曼滤波（EKF）和无迹卡尔曼滤波（UKF），它们在结构上沿用 KF 的基本思想[37]，但在模型更复杂或噪声特性更强的频标系统中能够提供更灵活的评估能力[38]。

3.5 滤波算法适用性分析与综合讨论

为了系统比较五类滤波方法的趋势保持能力与噪声抑制性能，本节基于统一的仿真环境，对各算法的残差序列与统计量进行综合分析。图 5 展示了五种滤波方法的残差随时间的变化情况，便于观察趋势保持能力以及对不同频段噪声的抑制效果，从残差图可以看出：

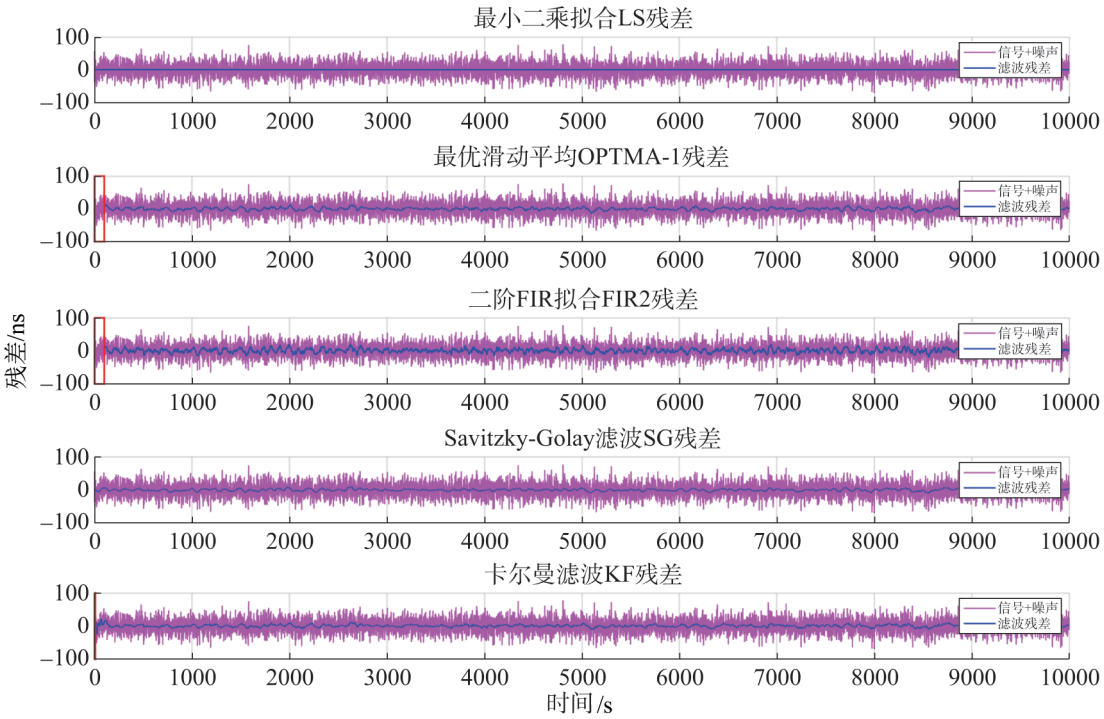


图 5　五种滤波方法的残差对比

全局最小二乘法（LS）在白噪声占主导、趋势项明显时，能够完全保持 0–2 阶趋势，对高频测量噪声的抑制也十分显著。然而在加入较强低频幂律噪声（如 FFM、RWFM）时，LS 残差中仍会出现缓慢变化的起伏，其拟合稳定性随噪声功率谱的变化而下降，且作为全局方法并不具备实时性。

一阶无偏滑动平均（OPTMA-1）能够有效抑制高频测量噪声，但其 FIR 结构在低频段存在固有衰减，因此当低频幂律噪声占主导时，残差仍可能残留明显的低频成分。二阶无偏 FIR 在保持二次趋势方面优于 OPTMA-1，能够提供更平滑的输出，但其性能对窗口长度更为敏感，窗口过大时动态响应能力下降。滑动平均窗口具有一定的延时性，图中用红色方框框出

了滑动窗口，取值大小为 100 个数据点。

Savitzky–Golay（SG）滤波法通过局部多项式拟合，可在保持趋势完全无失真的同时获得卓越的噪声抑制性能，尤其对于平滑观测序列具有明显优势。然而，由于其依赖对称窗口，不适用于实时场景。

卡尔曼滤波法（KF）作为一种状态空间估计方法，能够在预测与观测之间动态平衡，对短期噪声强烈且频率偏差缓慢变化的场景尤为稳健。KF 不直接保持趋势项，但能有效估计频率和漂移状态，是实时 GNSS 驯服系统中最具优势的方法。为了降低初值引入的较大波动，仿真时如图 5中红色方框所示，从第 6 个数据点开始计算。

为了进一步量化上述特性，图 6 给出了五类滤波方法的残差标准差与峰–峰值统计量，用于分别衡量高频噪声抑制能力与低频噪声控制能力。

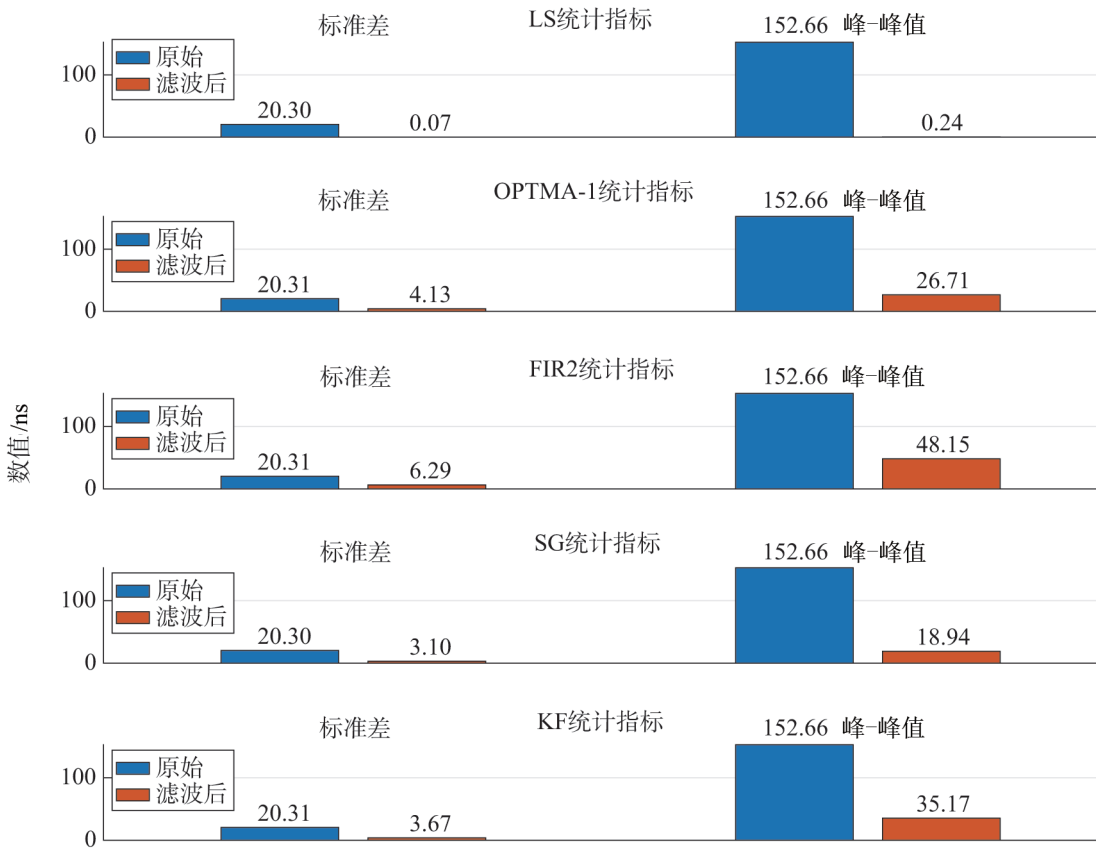


图 6 五种滤波方法的残差统计量比较（标准差与峰–峰值）

从标准差指标来看，SG 与 OPTMA-1 在高频噪声抑制方面最有效，能够显著降低测量白噪声带来的短期波动。二阶无偏 FIR 的标准差略高，这是由于其权系数分布更复杂，对白噪声的等效增益相对更大。相比之下，LS 在含有低频或长相关噪声（如 FPM、WFM、FFM、RWFM）时标准差明显增大，这是因为全局拟合会被强低频分量拉偏，使残差无法保持平稳

性。KF 的标准差介于几种方法之间，受 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}$ 配置影响较大，但整体保持稳定[39]。

峰–峰值指标主要反映各算法对低频噪声成分的抑制能力。从图中可见，SG 与 KF 能在保持趋势或动态估计的同时有效抑制低频起伏，而 LS、OPTMA-1 与二阶无偏 FIR 均不同程度地保留了低频噪声，其中 LS 受低频幂律噪声影响最为敏感，导致峰–峰值显著偏大。

综合而言，在趋势项可由低阶多项式描述且噪声以高频成分为主的情况下，SG 可提供近似最优的平滑效果；若需实时处理，OPTMA-1 与二阶无偏 FIR 提供轻量且稳定的预处理能力，其中二阶无偏 FIR 更适用于趋势呈二次变化的场景；KF 兼具实时性与建模能力，能够在存在多种噪声成分的情况下保持稳健估计，是 GNSS 频标驯服中的主要工程方案[40]。表 3 总结了各方法的关键特性，可为工程系统设计提供参考。

表 3　不同滤波方法的特性比较

方法	实时性	窗口需求	趋势保持能力	噪声抑制能力	典型应用
全局最小二乘（LS）	否	否	完全保持（0–2 阶）	非常强	离线分析、基准模型
一阶无偏滑动平均	是	需要	保持线性、削弱二次	较强	轻量实时平滑
二阶无偏 FIR	是	需要	保持二次趋势	中等	老化建模、频标趋势保持
SG 滤波（对称窗口）	否	需要（奇数）	完全保持（0–2 阶）	非常强	离线平滑、分析可视化
卡尔曼滤波（KF）	是	否	不保持趋势	中等	实时估计与控制

4　频率控制算法

典型的频率驯服系统本质上是一个以时差测量为反馈量的闭环控制系统。系统首先利用时差测量设备获取本地频标（铷钟或高稳晶振）与 GNSS 参考 1PPS 信号之间的时差序列[41]。该时差序列经过滤波器处理后，可得到平滑的相位或频率估值 $\hat{f}_k$，并与参考频率 f_{ref} 比较形成误差信号：

$$e_k = f_{\mathrm{ref}} - \hat{f}_k. \tag{32}$$

控制器根据误差 e_k（或状态估计 $\hat{x}_k$）计算频率控制量 u_k，经数模转换（D/A）后形成控制电压输入至压控晶振或铷原子钟[42]，使其输出频率随电压调整为：

$$f_{\text{out}}(k) = f_0 + k_u(u_k - u_c), \tag{33}$$

其中，k_u 为压控系数（Hz/V），u_c 为中心控制电压。控制系统的目标是使误差 e_k 收敛到零，并保持频率输出的长期稳定性[43]。其结构如图 7 所示[44]。

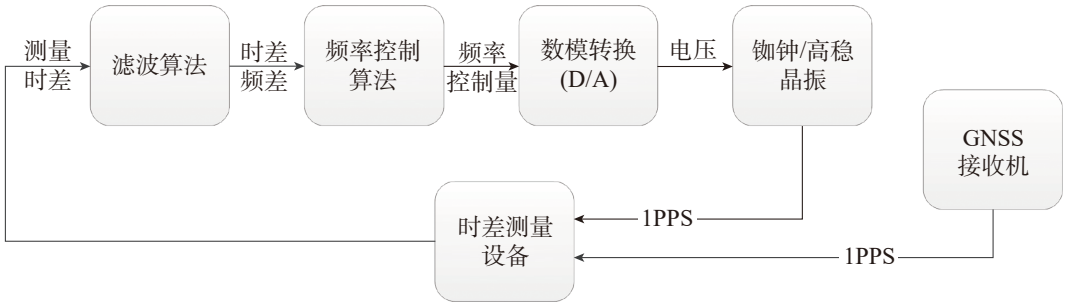


图 7 典型 GNSS 频率驯服系统的滤波-控制闭环结构

在此框架下，最根本的思路是基于对相位差（即时差）的直接反馈调节。通过测量本地振荡器与参考信号之间的相位差，直接计算出需要的频率调整量，然后将这一调整量转换成控制电压，从而实现频率锁定。基于这种思路，衍生出了多种不同复杂度的频率控制方法[45]。后续的小节将依次介绍这些方法：从最基础的相位差反馈锁相调整，到分段的相位差控制策略，再到乒乓算法，以及更复杂的 PID 控制和基于卡尔曼滤波状态估计的 LQR/LQC 最优控制。下面对它们进行系统性的介绍与比较。

4.1 基于相位差反馈的基本锁相控制

在基于 GNSS 的频标驯服系统中，最基础的一类控制方式可概括为基于相位差反馈的简化锁相控制。该方法可视为一种结构简化的锁相环（phase-locked loop, PLL），其核心思想是：利用 GNSS 参考 1PPS 与本地频标之间的相位差，推算频率偏差变化，再通过压控调谐端口对本地频标的输出频率进行调整，使其逐步锁定到 GNSS 时间基准。

系统的基本流程为：通过高精度时间间隔测量（time interval measurement, TIM）获取本地频标秒脉冲与 GNSS 秒脉冲之间的时差，记为 $x(k)$，其一阶差分可近似反映本地频率相对于 GNSS 参考的偏差：

$$\Delta f(k) \approx x(k) - x(k-1). \tag{34}$$

根据估计得到的频差产生控制电压 $u(k)$，作用于频标，使输出频率向抵消误差的方向微调，从而逐步减小两者之间的相位差。随着反馈迭代进行，本地频标最终可锁定至 GNSS 参考频率，实现基本的频率驯服[46]。

由于该方法未引入积分项、状态反馈结构或噪声建模，其对 GNSS 测量噪声和频标低频漂移的抑制能力有限，控制性能在噪声较强或漂移较大时会受到明显影响。然而，作为一种最朴素、实现成本最低的频率驯服策略，它直观体现了基于相位差的频率控制机制，并为后续更高阶算法（如分段调节、乒乓控制、PID 控制及基于状态估计的最优控制）奠定了概念基础。

4.2 基于时差反馈的分段频率控制算法

在基于 GNSS 的频标驯服系统中，最常用的控制方式是根据本地频标与 GNSS 1PPS 之间的时差（phase error）及其变化率（frequency error）来调节频标的控制电压，实现频率闭环同步[47]。该方法本质上是一种利用时差反馈进行频率调节的闭环控制算法。

设 $x(k)$ 表示本地 1PPS 相对于 GNSS 1PPS 的时差，其一阶差分表示为：

$$A(k) = x(k) - x(k-1), \tag{35}$$

刻画了本地频率相对于 GNSS 参考的偏差（即频差或时差变化率），其中 $A(k) > 0$ 表示本地时钟变慢，$A(k) < 0$ 表示本地时钟变快。该类方法通常采用分段控制策略：当频差较大时进行粗调；当频差较小时进行细调，必要时对时差偏置项 $x(k)$ 的固定相位偏移进行补偿。控制律可描述为：

$$u(k) = \begin{cases} u_{\text{coarse}}, & |A(k)| > \gamma \\ u_{\text{fine}}, & |A(k)| \le \gamma \end{cases} \tag{36}$$

其中，$u(k)$ 为施加到频标的控制电压增量，u_{coarse} 与 u_{fine} 分别对应粗调与细调步长，γ 为分段切换阈值。当时差存在明显偏置（如初始相位差较大）时，可引入相位抵消项：

$$u(k) = -k_A(k)\,A(k) - k_\phi\,x(k), \tag{37}$$

其中 $k_A(k)$ 在不同区间采用不同控制步长以实现频率粗调与细调，而 k_ϕ 用于慢时间尺度上的相位对准，从而在频率一致后进一步消除残余相位误差。

该算法无需状态空间建模，也不依赖预设窗口，其控制逻辑简单、实时性好，适用于中短时间常规驯服场景，特别是在本地频标频率偏差较大、需要快速收敛时具有较好的工程实用性[48]。后续更为复杂的控制方法（如 PI 控制、PLL 结构或基于 KF 的模型预测控制）均可视为此类“时差反馈”思想在不同框架下的扩展与泛化。

4.3 基于乒乓控制的频率调整算法（ping–pong algorithm）

在基于 GNSS 的频标驯服系统中，本地振荡器的频率偏差同时受到初相差、频率偏移与漂移率的共同影响。为实现实时校频并避免对短期稳定度造成破坏，文献中提出了“乒乓算法”（ping–pong algorithm）[49]。其核心思想是在粗调与微调之间反复切换，通过频率调整使时差在两个阈值之间往返，从而实现对频差的渐进式抑制[50]。

与传统 PI 控制不同，乒乓算法并不直接引入比例或积分项，而是依据当前时差 d_k 与预测时差 $\hat{d}_{k+1}$ 的符号关系及其变化趋势，自适应地调整频率修正量。当测量值与预测值同号且向零收敛时，采用带阻尼的预测补偿以避免过调；当二者符号相反、时差即将发生穿越时，通过限制频率变化率抑制反向超调；其余情况下则同时补偿当前频率偏差并修正下一时刻的预测钟差。综合上述策略，频率调整量可统一表示为：

$$\Delta f = -b + \frac{\hat{d}_{k+1}}{\gamma T}, \tag{38}$$

其中，b 为当前估计的频率偏差，γ 为阻尼因子，T 为校准间隔。在穿越情形下，Δf 进一步受漂移率估计项的约束以防止过度反向修正。

乒乓算法形成了一种在两个钟差阈值之间往返摆动并逐步收敛的控制模式，体现了“大偏差大调节、小偏差细调节”的分段控制思想。与采用固定增益的线性控制不同，该方法依据趋势预测、漂移率估计以及钟差符号变化动态调节频率控制量，在提高收敛速度的同时有效抑制过调现象。从控制机理上看，乒乓算法属于基于时差反馈的频率调节策略，通过持续利用测量误差驱动调频，使本地频标逐步锁定至 GNSS 参考时间；其结构简单、无需复杂状态建模，因而特别适合工程实现中对资源占用和实现复杂度要求较低的时频控制系统。

4.4 基于比例-积分-微分的 PID 控制

在频标驯服系统中，比例-积分-微分（PID）控制是一类结构简单、易于实现的经典反馈方法。其基本思想是根据当前时差误差、误差的累计量以及误差变化率生成控制电压，对频标进行频率调节，使本地频标逐步锁定到 GNSS 参考源[51]。

4.4.1 经典 PID 算法

设当前时差误差为：

$$e_k = z_k - r_k, \tag{39}$$

其中，z_k 为观测时差，r_k 为期望时差（通常为 0）。PID 控制器的离散控制律可写为：

$$u_k = K_\mathrm{P} e_k + K_\mathrm{I} \sum_{i=0}^{k} e_i T_\mathrm{s} + K_\mathrm{D} \frac{e_k - e_{k-1}}{T_\mathrm{s}}, \tag{40}$$

其中，K_P、K_I、K_D 分别对应比例、积分与微分增益，T_s 为采样周期。

PID 各项在频标控制中的物理意义如下：

(1) 比例项 $K_\mathrm{P} e_k$：根据当前时差立即给出修正，是调节频率偏差的主要手段；

(2) 积分项 $K_\mathrm{I} \sum e_i T_\mathrm{s}$：对长期误差进行补偿，可消除稳态频率漂移（如晶振老化）；

(3) 微分项 $K_\mathrm{D}(e_k - e_{k-1})/T_\mathrm{s}$：利用误差变化率进行预测性修正，有助于抑制快速漂移。

由于时差的一阶差分本身满足：

$$\Delta e_k \approx f_\mathrm{osc} - f_\mathrm{ref}, \tag{41}$$

微分项在本质上等价于对频率偏差的预测补偿，而积分项则提供对慢变漂移的长期校正能力。

然而，在 GNSS 驯服系统中，原始 1PPS 测量噪声包含明显的高频成分，直接使用 PID 往往会遇到以下问题：

(1) 微分项对高频噪声敏感，易导致控制电压抖动；

(2) 积分项在误差累积较大时可能产生积分饱和，引起超调或震荡。

因此工程中常加入抗积分饱和与带限微分机制，例如

$$I_k = I_{k-1} + \beta e_k T_\mathrm{s}, \qquad \beta \in [0, 1], \tag{42}$$

用于限制积分速度，从而改善过渡过程的稳定性[52]。

此外，为降低 GNSS 测量噪声对 PID 的影响，实际系统中常采用“滤波-控制”架构，即利用卡尔曼滤波得到的频率估计 $\hat{f}_k$ 替代原始观测信号：

$$u_k = K_{\mathrm{P}}(f_{\mathrm{ref}} - \hat{f}_k) + K_{\mathrm{I}} \sum_{i=0}^{k} (f_{\mathrm{ref}} - \hat{f}_i) T_{\mathrm{s}}, \tag{43}$$

从而在保持控制实时性的同时显著改善噪声抑制效果[53]。

4.4.2 自适应 PID 与分段控制策略

传统 PID 参数固定，难以应对晶振老化或温度变化引起的系统动态特性变化。为此，引入自适应控制策略，通过实时调整 K_{P}、K_{I} 等参数，使系统在不同工况下保持稳定与快速响应[54]。

自适应 PID 的一种典型实现是基于误差变化率的增益调节：

$$K_{\mathrm{P}}(k) = K_{\mathrm{P0}} + \alpha_{\mathrm{P}} |e_k - e_{k-1}|, \tag{44}$$

$$K_{\mathrm{I}}(k) = K_{\mathrm{I0}} + \alpha_{\mathrm{I}} |e_k|, \tag{45}$$

其中，α_{P} 与 α_{I} 为调节系数，控制器在误差变化较大时自动增强比例控制，而在稳态阶段减弱积分控制，防止振荡[55]。

另一种有效方法是分段控制（piecewise control），将控制过程划分为粗调（coarse tuning）与精调（fine tuning）两个阶段：

$$u_k = \begin{cases} u_{k-1} + \Delta u_{\mathrm{c}}, & |e_k| > e_{\mathrm{th}} \\ u_{k-1} + \Delta u_{\mathrm{f}}, & |e_k| \le e_{\mathrm{th}} \end{cases} \tag{46}$$

其中，e_{th} 为切换阈值，Δu_{c} 和 Δu_{f} 分别为粗调和精调步长。这种策略能够在频率偏差较大时快速收敛，在误差减小时实现高精度微调。在实际实验中，该方法将 10 MHz 晶振的锁定时间由原先的 4 800 s 缩短至约 900 s，同时维持相同的稳态精度[56]。

总体而言，PID 适用于噪声较低、频率漂移随时间相对平稳的场景；当 GNSS 短期噪声较强时，则需谨慎设置增益，或与状态估计方法（如 KF）联合使用以提升稳定性[57]。

4.5 基于卡尔曼滤波状态估计的 LQR 最优控制

在上一节中，卡尔曼滤波（KF）已经基于“相位-频率-漂移”的状态空间模型，提供了对本地振荡器误差的最优线性估计[58]。KF 的输出不仅抑制了 GNSS 测量噪声带来的高频扰动，同时以最小方差形式估计了频率偏移与漂移，使系统能够在噪声强烈的条件下获得稳定且可用于控制的状态量。

在此基础上，本节构建线性二次型调节器（LQR），利用 KF 的状态估计结果作为反馈量，计算压控晶振的最优调节电压，实现频标在“同步阶段快速拉齐 + 守时阶段抑制漂移”的双重目标[59]。

4.5.1 控制器目标

LQR 控制的核心思想是在已知系统状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 的前提下，通过最优反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 生成控制输入，使累计时差、频率偏差及其漂移在满足平稳性的同时尽快收敛[60]。控制器接收来自

KF 的状态估计

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{47}$$

其中，$\hat{x}_0$、$\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$ 分别对应相位偏差、瞬时频率偏移及其变化趋势（漂移率）。该三维状态结构与 KF 中建立的相位-频率-漂移积分关系一致，从而实现滤波与控制之间的无缝衔接。

4.5.2 最优反馈律

在离散状态空间模型 $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k$ 下，LQR 采用基于状态估计的线性反馈律：

$$\boldsymbol{u}_k = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}_k, \tag{48}$$

其中，反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 由 MATLAB 函数 `dlqr` 求解，$\boldsymbol{K} = \mathrm{dlqr}(A, B, \boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{R}_{\mathrm{c}})$。权重矩阵 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}$ 用于平衡对累计时差、频率偏移及其漂移的抑制强度，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}$ 用于约束控制输入幅度。LQR 的目标是最小化无限时域二次型代价函数，可表示为：

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}} \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{c}} \boldsymbol{u}_k \right), \tag{49}$$

从而在频标系统中实现收敛速度与控制平滑性之间的最优折中：增大相位分量权重可加快累计时差消除，增大频率分量权重可抑制瞬时频率波动并提升输出平滑性，而增大漂移分量权重则有助于提前补偿老化、温度等引起的慢变频率漂移。

4.5.3 KF-LQR 的协同优势

由于 KF 提供了低噪声的状态估计，而 LQR 在此基础上给出最优反馈，两者组合构成 Linear Quadratic Control（LQC）框架：Estimator (KF) + Controller (LQR)。其优势主要体现在以下几个方面：卡尔曼滤波（KF）能够有效抑制 GNSS 测量噪声，使控制器不再直接受短期抖动影响；线性二次型调节器（LQR）通过二次代价函数在调节速度与输出平滑性之间实现自动权衡；与基于固定窗口的 FIR 或 SG 滤波方法不同，该结构不依赖滑动窗口，因而适用于实时频率控制；同时，KF-LQR 框架能够在统一状态空间内同时处理相位、频率及漂移三类误差，这是传统 PID 控制难以实现的。基于上述特点，KF-LQR 被认为是 GNSS 驯服晶振中与系统物理结构高度匹配的闭环控制策略之一，尤其适用于长期稳定度要求高且短期噪声较强的频标工程应用场景[61]。

4.6 各种算法的比较与分析

本节介绍的多类频率控制算法，本质上都基于一个共同的闭环思想：利用 GNSS 与本地频标之间的时差（或相位差）作为反馈量，通过调节控制电压驱动本地频标的频率逐步逼近参考时间基准。根据系统噪声水平、滤波条件、硬件能力以及目标时频精度的不同，在不同工程场景中各具优势。

基于相位差反馈的简化锁相控制结构极其简单，模型依赖最少，在初始偏差较大的快速拉齐阶段具有明显响应优势。随后介绍的分段时差控制与乒乓控制算法通过粗调/细调切换和趋势判断，有效提升了收敛速度和工程鲁棒性，适合轻量级实时控制方案。PID 控制作为经典反馈方法，将误差、误差积累和误差变化率统一到一个框架中，适用于误差平稳、噪声适

中的一般工程场景；其改进形式（如带限微分、自适应增益、抗积分饱和）在复杂工况下可进一步提升稳定性。而基于卡尔曼滤波状态估计的 LQR/LQC 最优控制则依托状态空间模型，结合 KF 抑制 GNSS 测量噪声的能力，实现相位、频率与漂移的整体调节；在噪声强烈或频率漂移显著的高稳定度系统中具有更优的长期性能，但同时对模型和计算资源要求更高。表 4 对本节讨论的几类典型控制算法的特点作了归纳比较。

表 4　不同频率控制算法的特点比较

控制方法	结构复杂度	对噪声敏感性	动态响应特性
基于相位差反馈的简化锁相控制	很低	高（无滤波）	拉齐快、易超调
分段时差控制（粗/细调）	低	中（基于差分）	粗调快、细调稳
乒乓控制（Ping–Pong）	中	中（需趋势判断）	收敛平稳、避免过调
PID 控制（P/I/D）	中	较高（D 项敏感）	可调节灵活、需调参
改进型 PID（自适应/抗饱和）	中–高	中（稳健性增强）	过渡平滑、响应改进
KF–LQR / LQC（最优控制）	高	很低（依赖 KF 降噪）	平滑快速、全局最优

5 总　结

本文围绕 GNSS 驯服本地频标的核心问题，从噪声建模、时差滤波到频率控制算法，系统构建了一个统一的分析框架，并在具有代表性的仿真环境下对多类滤波与控制方法的性能进行了深入比较。首先，本文建立了包含趋势项与五类幂律噪声（WPM、FPM、WFM、FFM、RWFM）的本地频标模型，能够较为真实地反映频标在实际运行中的随机特性与长期漂移行为。在此基础上，系统分析了 GNSS 1PPS 测量噪声与频标噪声的统计特征，为后续滤波器设计提供了准确的噪声背景。其次，本文对常用的频标预处理滤波方法进行了系统研究，包括全局最小二乘（LS）、一阶与二阶无偏 FIR、Savitzky–Golay（SG）以及卡尔曼滤波（KF）。仿真结果表明，LS 适用于趋势显著且噪声偏白的场景，无偏 FIR 在保持趋势方面具有可控的阶次优势，SG 在白噪声抑制和曲线平滑方面表现突出，而 KF 能在噪声强、动态性明显的条件下提供最稳健的估计；这些结果为不同噪声环境下的滤波选择提供了明确参考。最后，本文针对频率驯服过程中的闭环控制问题，比较了多类常见控制策略，包括基于相位差的基本锁相控制、分段时差控制、乒乓算法、PID 控制以及基于卡尔曼估计的 LQR/LQC 最优控制。研究表明，简单控制结构在初始拉齐阶段具有快速响应优势，分段策略与乒乓控制提升了工程实用性，而 PID 与 LQR/LQC 则分别适用于噪声适中和高稳定度要求的场景。多类控制方法从不同角度体现了“基于时差反馈”的共同思想，但在复杂度、动态响应与稳定性方面则分别有各自的适用范围。

本文通过统一建模、系统仿真与方法比较，提出了一套完整的“噪声分析-滤波预处理-闭环控制”频标驯服研究体系。该体系既总结了现有方法的结构特点与性能边界，也为工程实践中滤波器与控制器的选型提供了可操作参考，为构建更高稳定度、更强抗噪声能力的 GNSS 驯服频标系统奠定了基础。

参考文献：

[1] Xiao Z, Zeng Y. Science China: Information Sciences, 2022, 65: 131301
[2] 王义遒. 时间频率学报, 2003, 26: 81
[3] 李光, 赵福川, 王延松. 中兴通讯技术, 2017, 23: 56
[4] Kunzi F, Montenbruck O. NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation, 2022, 69: navi.531
[5] Hasan K F, Feng Y, Tian Y C. IEEE Transactions on Network and Service Management, 2022, 20: 3289
[6] 王义遒. 宇航计测技术, 2007, 27: 1
[7] 张玉珍, 马德康, 金文敬, 等. 中国科学院上海天文台年刊. 上海: 上海科学技术出版社, 1986: 172
[8] 赵学军. 现代导航, 2021, 12: 5
[9] 周善石, 胡小工, 刘利, 等. 天文学报, 2019, 60: 59
[10] 曾亮, 孟庆杰, 徐伟. 计量技术, 2008, 52: 6
[11] 杨旭海, 李孝辉, 华宇, 等. 导航定位与授时, 2021, 8: 1
[12] Banerjee P, Matsakis D. An Introduction to Modern Timekeeping and Time Transfer. Cham, Switzerland: Springer, 2023: 189
[13] 王嘉琛, 樊多盛, 肖波, 等. 时间频率学报, 2020, 43: 270
[14] Guo R, Zhou J, Hu X, et al. Advances in Space Research, 2015, 55: 2889
[15] 罗璠, 李建文, 黄海, 等. 测绘科学技术学报, 2014, 31: 34
[16] Kou Y, Jiao Y, Xu D, et al. Advances in Space Research, 2013, 51: 969
[17] 何力睿, 章巍, 熊嘉明, 等. 导航定位与授时, 2019, 6: 87
[18] 郭文飞, 朱萌萌, 辜声峰, 等. 武汉大学学报 (信息科学版), 2023, 48: 1126
[19] Dey A, Xu B, Lu X, et al. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2022, 19: 1
[20] Gao Y, Li G. GPS Solutions, 2022, 26: 87
[21] Shi D, Li P, Li J P. 2013 10th International Computer Conference on Wavelet Active Media Technology and Information Processing (ICCWAMTIP). New York, NY, USA: IEEE, 2013: 198
[22] Cai J H, Li P, Wen Y M, et al. Acta Physica Sinica, 2016, 65: 104205
[23] 李建勋, 柯熙政, 丁德强. 天文学报, 2007, 48: 84
[24] 马岳鑫, 唐成盼, 胡小工. 天文学进展, 2023, 41: 134
[25] 左朝阳, 刘苏谚, 谭哲, 等. 第十三届中国卫星导航年会论文集——S05 时间频率与精密授时. 北京, 2022: 82
[26] Joteppa S, BK C, Chippalkatti V S. Journal of Mechanical Engineering and Automation, 2017, 7: 23
[27] 伍贻威, 杨斌, 肖胜红, 等. 武汉大学学报 (信息科学版), 2019, 44: 1226
[28] 薛毅聪, 龚航, 刘增军, 等. 全球定位系统, 2017, 42: 38
[29] Zhang L, Xu L, Wang X, et al. Electronics, 2025, 14: 2870
[30] 樊多盛, 刘娅, 李孝辉, 等. 时间频率学报, 2021, 44: 26
[31] 崔保健, 王玉珍. 电子测量与仪器学报, 2010, 24: 808
[32] Shmaliy Y S, Ibarra-Manzano O, Arceo-Miquel L, et al. Measurement, 2008, 41: 538
[33] Wang K, El-Mowafy A. Geo-spatial Information Science, 2022, 25: 14
[34] 李孝辉, 吴海涛, 高海军, 等. 控制理论与应用, 2003, 20: 551
[35] 樊多盛, 施韶华, 李孝辉. 宇航学报, 2015, 36: 90
[36] 宋会杰, 董绍武, 王燕平, 等. 武汉大学学报 (信息科学版), 2019, 44: 1205
[37] Li H, Zhang X, Li Z, et al. 2020 12th IEEE PES Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC). New York, NY, USA: IEEE, 2020: 1
[38] 伍贻威, 龚航, 朱祥维, 等. 中国科学: 物理学力学天文学, 2016, 46: 069502
[39] 樊多盛, 刘娅, 李孝辉. 时间频率学报, 2019, 42: 224
[40] 张晗, 黄艳, 张磊, 等. 计量科学与技术, 2025, 69: 37
[41] 张延, 黄佩诚. 天文学进展, 2006, 24: 1
[42] Badarov D, Mihov G. 2022 13th National Conference with International Participation (ELECTRONICA). New York, NY, USA: IEEE, 2022: 1
[43] 张驿, 陈凌, 袁田. 电子质量, 2024, (03): 36
[44] 陈瑞琼, 卢建福, 刘娅, 等. 电子测量技术, 2021, 44: 143

[45] 鲁刚, 何在民, 王璐璐, 等. 电子设计工程, 2022, 30: 31
[46] Zhou H, Kunz T, Schwartz H. IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 2011, 58: 43
[47] Gu X, Chang Q, Glennon E P, et al. Sensors, 2015, 15: 17895
[48] Huang F, Lu X, Liu G, et al. 2010 6th International Conference on Wireless Communications Networking and Mobile Computing (WiCOM). New York, NY, USA: IEEE, 2010: 1
[49] 樊多盛, 施韶华, 李孝辉. 电子测量与仪器学报, 2013, 27: 980
[50] 樊多盛, 刘娅, 李孝辉, 等. 时间频率学报, 2018, 41: 300
[51] 单庆晓, 杨俊. 测试技术学报, 2009, 23: 396
[52] Irshad M, Vemula N K, Devarapalli R, et al. Journal of Electrical Engineering, 2024, 75: 258
[53] 何昕, 阳方林, 钟骁勇. 信息通信技术, 2025, 19: 68
[54] 程林, 郑鑫. 信息技术与信息化, 2025, (06): 46
[55] 王红建, 王玲, 黄文德, 等. 传感器与微系统, 2018, 37: 132
[56] 张杰, 周栋明. 电子学报, 2013, 41: 412
[57] Jiang L, Yan X, Xu W, et al. Journal of Physics: Conference Series, 2023, 2638: 012004
[58] 伍贻威, 牟卫华, 龚航, 等. 武汉大学学报 (信息科学版), 2016, 41: 1253
[59] 王琦, 彭良福. 全球定位系统, 2021, 46: 1
[60] 赵书红, 董绍武, 白杉杉, 等. 电子与信息学报, 2021, 43: 1457
[61] 王习东, 熊偌炎, 杨业泉, 等. 国外电子测量技术, 2023, 42: 110

A Comprehensive Review of Filtering and Control Methods for Local Frequency Standards Based on GNSS Reference Signals

MU Lei[1,2], HU Xiaogong[1], ZHANG Zhongping[1,3], LI Jin[1,2]

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 2. School of Astronomy and Space Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. Key Laboratory of Space Object and Debris Observation, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 21008, China)

Abstract: High-precision time and frequency standards play a critical role in modern science, technology, and national defense. By disciplining local frequency standards with accurate timing signals provided by the Global Navigation Satellite System (GNSS), long-term accuracy and short-term stability can be achieved at relatively low cost. This paper analyzes the statistical characteristics of measurement noise in the one-pulse-per-second (1PPS) signals generated by GNSS receivers and systematically summarizes the random drift and noise properties of local oscillators. A unified model covering five typical power-law noise types is established. Representative time-difference noise filtering methods, including global least squares, first- and second-order unbiased finite impulse response (FIR) filters, and Kalman filtering, are reviewed and compared in terms of their applicability under different noise conditions. In addition, various frequency control strategies are discussed, such as

simplified phase-locked control based on phase differences, segmented time-difference control, ping-pong algorithms, PID control, and optimal control methods based on Kalman-filter-based state estimation. The characteristics of these methods are analyzed with respect to structural complexity, noise suppression capability, and dynamic response. On this basis, a comprehensive frequency disciplining analysis framework of "noise analysis–filtering processing–closed-loop control" is constructed, providing theoretical support and practical guidance for the engineering implementation and scheme selection of GNSS-disciplined frequency standards.

Key words: time and frequency standards; GNSS timing; frequency disciplining; filtering algorithms; power-law noise