

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2025.10.8

# 晶格化对白矮星振荡模式的影响

赵乘辉<sup>1,2</sup>, 李洪波<sup>2</sup>, 邵立晶<sup>2,3</sup>

(1. 北京大学 物理学院 天文学系, 北京 100871; 2. 北京大学 科维理天文与天体物理研究所, 北京 100871;  
3. 中国科学院 国家天文台, 北京 100012)

**摘要:** 白矮星的振荡模式受其物态与结构的影响。通过观测振荡频谱可以探究白矮星的物理性质, 进而对恒星演化、银盘年龄和 Ia 型超新星等研究提供有用信息, 也可以反向了解极端环境下的物理规律。当白矮星逐渐冷却时, 内部的离子发生一阶相变从而导致晶格化; 晶格化过程会影响白矮星的冷却, 进而影响振荡模式和其他的观测特征。首先回顾了白矮星在物理学与天文学中的科学意义, 进而介绍了白矮星星震学的研究背景。此外, 基于白矮星不同的物态模型, 讨论了质量半径关系, 最后详细研究了白矮星的球型振荡和环型振荡模式。结果表明, 晶格化对球型振荡的影响主要是产生了新的振荡模式, 即界面模式 ( $i$  模) 和剪切模式 ( $s$  模), 并且基本模式 ( $f$  模) 的频率有所升高; 晶格化导致环型振荡的频率与白矮星核心半径和质量有显著关系。结果还给出了振荡的轮廓与核心半径的关系, 加深了对白矮星振荡物理图像的理解。

**关键词:** 白矮星; 晶格化; 物态方程; 星震学; 振荡模式

**中图分类号:** P142.6 **文献标识码:** A

## 1 引言

### 1.1 白矮星研究的背景和现状

随着量子力学的发展, 人们逐渐认识到需要一种新的统计方法来描述微观粒子, 特别是费米子, 因为它们遵循泡利不相容原理。1926 年, Fermi 和 Dirac 先后提出关于费米子的量子统计理论, 即 Fermi-Dirac 统计。同年, Fowler<sup>[1]</sup> 利用 Fermi-Dirac 统计解释了白矮星内部的电子简并压平衡自身的万有引力。在 Fowler<sup>[1]</sup> 工作的基础上, Chandrasekhar<sup>[2]</sup> 考虑了相对论性的能动量关系, 发现白矮星存在一个最大质量, 这个质量称为 Chandrasekhar 极限质量, 其数值为  $M_{Ch} \approx 1.46 M_{\odot}$ 。当白矮星的质量超过极限质量时, 电子简并压将无法

收稿日期: XXXX; 修回日期: XXXX

资助项目: 国家自然科学基金项目 (12447148); 中国博士后科学基金 (2024M760081); SKA 专项 (2020SKA0120300); 北京市自然科学基金项目 (1242018); 马克斯·普朗克学会马普伙伴合作项目。

通讯作者: 李洪波, lih2020@pku.edu.cn

光谱型	特征
DA	只有巴尔末线; 没有 He I 或金属
DB	He I 线; 没有 H 或金属
DO	明显的 He II; 存在 He I 或者 H

表 1 部分白矮星光谱型的定义。更完整的光谱型定义见文献<sup>[8]</sup>

平衡万有引力, 从而导致白矮星进一步塌缩。白矮星在宇宙中分布广泛, 它是人们理解极端条件下物理规律的天然实验室。典型来说<sup>[3]</sup>, 白矮星的温度范围为  $10^4 - 10^8$  K, 压强范围为  $10^5 - 10^{25}$  erg/cm<sup>3</sup>。

白矮星形成初期, 其前身星的冷却由中微子发射主导。中微子的损失使白矮星前身星的中心温度要低于包层温度, 从而形成逆温层, 并在星体内部产生负向的光子流量。因此观测白矮星前身星的演化可以对中微子发射率进行限制, 进而对电弱相互作用下的物理规律进行检验<sup>[3]</sup>。当演化过前身星这一阶段后, 光子辐射冷却主导时, 白矮星内部的物态是简并电子气, 引力收缩也开始急剧减小到几乎停止。此时白矮星内部的动力学与热力学性质退耦, 简并电子压提供了几乎全部的压强, 而高密度下的正离子作为近似理想气体对支撑白矮星结构的贡献越来越小。简并电子气具有的热容小<sup>[4]</sup>, 出现电子和离子对能量的贡献互换, 白矮星的能量几乎由核子热运动提供。

随着白矮星的逐渐冷却, 核心库伦势能相较于核子热运动动能变得越来越重要。温度降至足够低时, 核子物质的状态发生相变, 产生晶格化。Mestel 和 Ruderman<sup>[5]</sup> 指出, 晶格化过程从中心向表层扩散后, 结晶区域的热容将不再由气体中的粒子热运动贡献, 而是以等效于声子形式存在的量子化晶格振动所贡献。当内部温度  $T$  下降, 直到  $kT$  ( $k$  是玻尔兹曼常数) 小于最低声子能量, 即温度  $T$  低于固体的德拜温度时, 声子较高的能级难以被激发, 白矮星的热容也随之下降。Ostriker 等人<sup>[6]</sup> 的研究表明, 与固相相关的热容变化应导致白矮星在晶格化后的演化速度变快, 此时内部热容正比于  $T^3$ 。

在天文学上, 根据白矮星的光谱特征, 人们将白矮星划分为不同的光谱型。表 1 展示了占比最大的三种类型: DA 型具有富含 H 的大气, 数量上约占 86% (斯隆数字化巡天第四次数据发布 (SDSS dr4) 的 9316 颗有光谱认证的白矮星中, 有 8000 颗是 DA 型<sup>[7]</sup>); DB 型的大气主要由 He 组成, 数量约占 8%; DO 型的大气也主要由 He 组成, 数量占比很小, 并且该类型因其极高的温度 ( $45000\text{K} \leq T_{\text{eff}} \leq 80000\text{K}$ ), 人们观测到了明显的 He II 线。然而, 白矮星的光谱特征难以体现内部的相变过程, 很多研究的重心放在了白矮星内部的相变对其结构和演化的影响上: 结晶过程释放的相变潜热会延长白矮星的冷却过程<sup>[9]</sup>; 核心内部可能不会以混合状态结晶, 而是在结晶时发生相分离<sup>[10, 11]</sup>, 相分离可能会提供大量额外的能量<sup>[12-14]</sup>; 通过对球状星团 NGC 6397 的观测, Winget 等人<sup>[15]</sup> 证实了白矮星的冷却会导致晶格化并释放相变潜热; 晶格化会明显缩短重暗物质在白矮星内核的热化时间<sup>[16]</sup>, 晶格化发生时的动力学也可能是造成孤立白矮星具有强磁场的原因<sup>[17]</sup>; 通过 Gaia 数据中一些白矮星

族群的异常冷却现象, Bédard 等人从不同角度证实了晶格化现象的存在, 对利用白矮星测定恒星年龄的方法产生了深远的影响<sup>[18]</sup>。

白矮星是 Ia 型超新星的前身星, 其结构演化特征及动力学过程对构建标准烛光的光度校准模型具有重要科学价值。理论上, 白矮星内部晶格化、相分离、同位素分馏效应, 以及能量输运动力学机制、脉动模式、星风驱动下的质量损失机制和表面金属丰度分布等物理因素, 都可能对超新星爆发时的光变曲线特性产生影响, 继而改变其亮度。因此以上因素都需要后续系统性的研究<sup>[3]</sup>。

## 1.2 星震学的研究背景

星震学通过建立恒星振荡模型并与观测的振荡模式比较, 从而分析恒星内部结构<sup>[19]</sup>。得益于 MOST<sup>[21]</sup>、CoRoT<sup>[22]</sup>、Kepler<sup>[23]</sup> 和 TESS<sup>[24]</sup> 等天基探测器的高精度时序测光数据, 星震学方法在恒星研究中的深度和广度持续拓展。通过观测的振荡频谱反演获得的恒星参数精度通常要比用赫罗图 (Hertzsprung-Russell Diagram, HRD) 或颜色星等图 (Colour-Magnitude Diagram, CMD) 等传统方法得到的高一至几个数量级<sup>[25]</sup>, 星震学已成为研究星体结构与演化的重要方法。其中最具代表性的案例是对太阳的研究, 通过对太阳的振荡模式进行建模, 人们可以获得丰富的关于太阳结构的物理信息<sup>[26]</sup>。对于外包层对流不稳定的主序星和亚巨星, 这些恒星因对流包层的湍流运动产生的随机激发机制, 表现出与太阳相似的振荡模式<sup>[27, 28]</sup>, 并已通过 Kepler<sup>[23]</sup> 卫星的高精度观测获得充分证实<sup>[29]</sup>。

对于致密星的研究, 星震学也发挥着重要作用。星震学可以高精度测量白矮星的物理参数: 针对白矮星 PG 1159-035, 依托于全球望远镜的长期观测, Winget 等人<sup>[30]</sup> 认证出 101 个振荡模式, 对其质量、自转周期和冷却导致的振荡周期变化率<sup>[31]</sup> 进行了高精度的测量; 通过 TESS 的观测, 人们发现了许多脉动白矮星, 并通过振荡频谱反演其结构参数, 详细的结果可参看 Romero 等人<sup>[32]</sup> 和 Calcaferro 等人<sup>[33]</sup> 的工作。对白矮星振荡模式的研究还可以给出高精度的内部自转信息<sup>[35]</sup> 以及化学组成<sup>[36, 37]</sup>。通过星震学限制致密星的物态和物理性质, 并研究相关的电磁波和引力波的观测现象, 可以参看 Li 等人<sup>[34]</sup> 详细的讨论。

从恒星内部质元的运动出发, 恒星的振荡可以分为径向振荡与非径向振荡。从振荡的物理机制出发, 恒星的振荡可以分为不同的模式, 图 1 展示了一颗旋转恒星的振荡频率与对应的物理机制。

**基于线性微扰理论, 恒星振荡的色散关系为<sup>[19, 45]</sup>**

$$k_r^2 = \frac{1}{\omega^2 c^2} (\omega^2 - S_\ell^2) (\omega^2 - N^2), \quad (1)$$

其中  $k_r$  是振荡的径向波数,  $\omega$  是振荡频率,  $c$  是恒星内部介质的局域声速, 它们都是半径  $r$  的函数。 $S_\ell$  是 Lamb 频率, 定义为

$$S_\ell^2(r) = \frac{\ell(\ell+1)c^2(r)}{r^2}, \quad (2)$$

其中  $\ell$  为振荡的度数 (degree)。 $p$  模式是由压强主导回复作用的振荡模式, 传播范围在振荡频率高于 Lamb 频率 (即  $\omega > S_\ell$ ) 的恒星包层区域。 $N$  是 Brunt-Väisälä (BV) 频率, 定义

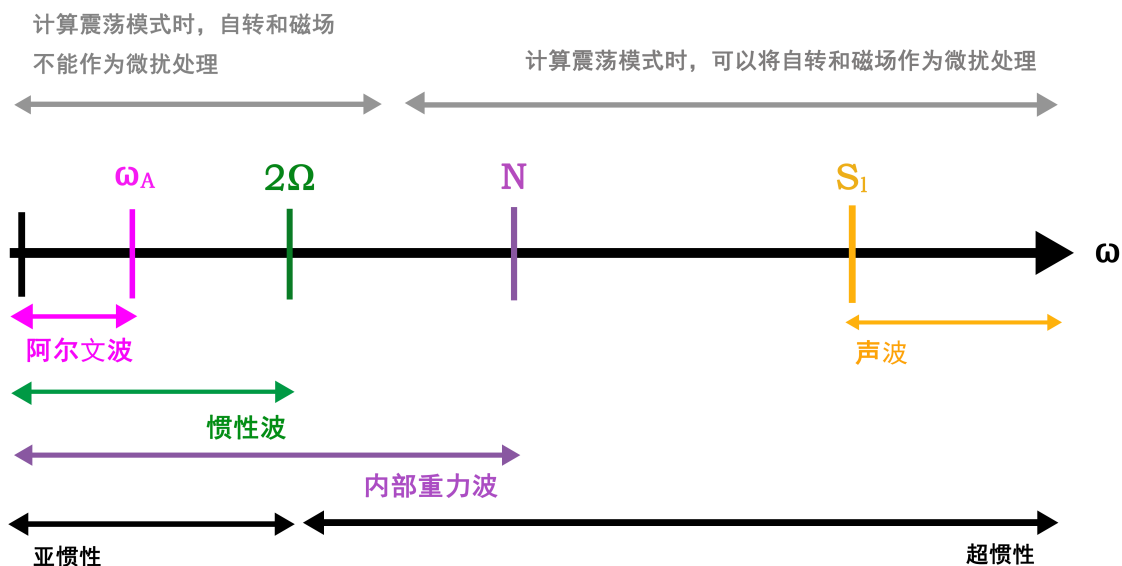


图 1 图中展示了振荡频率和激发它们的物理机制。其中  $\Omega$  为恒星的自转角速度,  $N$  和  $S_\ell$  分别为 Brunt-Väisälä (BV) 频率和 Lamb 频率,  $\omega_A$  为 Alfvén 频率。该图参考了 Aerts 和 Tkachenko<sup>[25]</sup> 的图 3。

为

$$N^2(r) = g(r) \left[ \frac{1}{\Gamma_1(r)P(r)} \frac{dP(r)}{dr} - \frac{1}{\rho(r)} \frac{d\rho(r)}{dr} \right], \quad (3)$$

其中  $g$  是重力加速度,  $\Gamma_1$  是绝热指数,  $P$  为压强,  $\rho$  为密度。 $g$  模式是由浮力主导回复作用的振荡模式, 其传播范围在振荡频率低于 BV 频率 (即  $\omega < N$ ) 的恒星包层区域。对于存在磁场或自转的恒星, 其振荡机制呈现如下新特征: 当恒星包层等离子体受磁场约束时, 洛伦兹力取代浮力成为主要回复力, 此时振荡特征频率由 Alfvén 频率表征; 在具有显著自转的星体中, 科里奥利力主导产生惯性相关的振荡模式。值得注意的是, 自转会打破本征频率的简并性, 引发振荡模式的频率分裂现象。这一物理机制为星震学提供了重要观测依据; 通过精确测量模式分裂的频移量, 可实现对恒星自转周期的高精度反演。

图 2 总结了赫罗图上具有脉动特征的恒星类型, 恒星在演化过程中会穿越不同的脉动不稳定区域, 从而呈现周期性光度变化。在经典不稳定带内 (该区域呈近垂直分布, 由两条黑色虚线围成, 包含  $\delta$  造父变星 ( $\delta$  Cep) 和天琴 RR 变星 (RR Lyr) 等典型成员), 恒星脉动振幅因  $\kappa$  机制的强烈驱动而显著增强。主序带左下方的演化序列存在三种白矮星脉动体: GW Vir 型 (DOV 型, 是白矮前身星)、DBV 型 (V777 Her 型) 和 DAV 型 (ZZ Cet 型; DO、DB、DA 的分类判据和光谱特征可以参阅 McCook 和 Sion<sup>[8]</sup> 的表 1, 后缀 “V” 表示变星属性)。这些白矮星普遍表现出低度、高阶的  $g$  模式振荡特征, 振荡周期集中在分钟量级。白

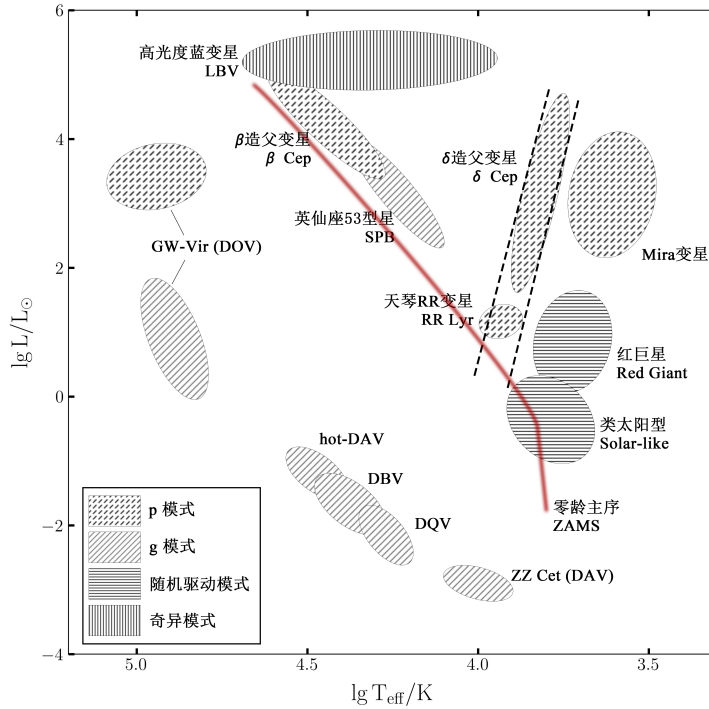


图 2 脉动赫罗图。图中的英文缩略名参考自<sup>[19]</sup>和<sup>[20]</sup>。红色线代表零龄主序带。椭圆形的阴影区域代表以下四种不同的振荡模式： $p$  模式（虚斜线）； $g$  模式（实斜线，///）；随机驱动的脉动模式（横线，≡）；奇异模式（竖线，|||）。经典不稳定带由两条黑色虚线围成， $\delta$  造父变星就位于此带中。大部分恒星离开主序后，演化为白矮前身星（具有脉动特征的白矮前身星又称 GW Vir 或 DOV 型星），而后冷却成为 DA(V) 和 DB(V) 型（脉动）白矮星。图片绘制参考自 Kurtz 和 Donald<sup>[20]</sup>。

矮星的振荡由电离包层的热动力机制激发，对于 DAV 型，该机制有时也被称为对流驱动。

2023 年, Tang 和 Lin<sup>[38]</sup> 考虑了  $^{16}\text{O}$  白矮星的晶格化对球型振荡模式 (Spheroidal mode) 和潮汐形变的影响。研究发现, 振荡的基本模式 ( $f$  模式) 的频率受晶格化的影响很小 (百分之一量级), 而界面模式 ( $i$  模式) 和剪切模式 ( $s$  模式) 的频率对晶格化半径敏感。此外, 当晶格化核心尺度大于 70% 的白矮星半径时, 晶格化对潮汐形变的影响变显著。研究还发现, 未晶格化的白矮星的质量、转动惯量、潮汐形变和  $f$  模式频率存在对物态方程不敏感的普适关系。取决于白矮星的质量和组分, 晶格化会对普适关系产生  $O(10^{-2})$  的影响, 并体现在双白矮星旋近以及并合时辐射的引力波信号中, 进而被未来的天基引力波探测器捕获到。

本文安排如下。第 2 章考虑了不同物态模型和元素组分的白矮星结构, 在此基础上计算了白矮星的质量半径关系。第 3 章详细计算了白矮星球型和环型模式的振荡频率, **讨论了振荡频率和振荡轮廓与白矮星的质量、组分和晶格化半径的关系**, 完善了晶格化白矮星振荡的物理图像。第 4 章是本文的总结与展望。

## 2 白矮星的物态模型和结构

白矮星内部主要由简并电子和原子核构成。简并电子气具有极高的导热效率，故可以认为缓慢冷却的白矮星内部是等温的，在低温的情况下物态方程只与压强  $P$  和密度  $\rho$  相关。白矮星内部的压强主要由电子简并压贡献，密度主要由核子贡献。本节将依次介绍三种白矮星的物态模型：Chandrasekhar 模型、Hamada & Salpeter 模型和 Chamel & Fantina 模型。将物态方程结合流体静力学平衡方程，可得到球对称白矮星的结构。

由于费米子的交换反对称性，费米气体在能量为  $\epsilon$  的单粒子态下的平均占据数遵从费米-狄拉克分布  $f(\epsilon) = [e^{(\epsilon - \mu_f)/kT} + 1]^{-1}$ ，其中  $\mu_f$  为化学势。在零温下，上式趋于 Heaviside 阶跃函数  $\theta(\epsilon - \mu_f)$ ，电子气依次填充最低能态，最高占据能态对应的能量称为费米能  $E_F$ 。强简并电子气体的压强为

$$P_e = \frac{1}{3} \frac{2S+1}{h^3} \int_0^{E_F} p v d^3p, \quad (4)$$

其中  $S = \frac{1}{2}$  为粒子的自旋。结合电子的色散关系  $E^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4$ ，可以得到电子气体的压强

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{(p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}} 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{m_e c^2}{8\pi^2 \lambda_e^3} \left[ x_r \left( \frac{2}{3} x_r^2 - 1 \right) \sqrt{1 + x_r^2} + \ln \left( x_r + \sqrt{1 + x_r^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $x_r = p_F/m_e c = \lambda_e k_e$  是无量纲的费米能， $\lambda_e = h/m_e c$  是电子的约化康普顿波长， $k_e$  是电子的费米波数。

白矮星的密度为

$$\rho = \mu_e m_u n_e = 0.97395 \times 10^6 \mu_e x_r^3, \quad (6)$$

其中  $n_e$  是电子数密度， $\mu_e = m_B/m_u/Y_e$  是每个电子的平均分子量， $m_B$  是核子质量， $Y_e$  是每个重子的平均电子数。式 (5) 和式 (6) 构成的白矮星的物态方程，称为 Chandrasekhar 模型。

基于 Chandrasekhar 模型，Hamada 和 Salpeter<sup>[39]</sup> 考虑了电子和电子、电子和核子的库仑相互作用修正，以及电子空间分布不均匀的 Thomas-Fermi 修正，提出的白矮星物态方程可表示为

$$\rho = \rho_{\text{Ch}}, \quad (7)$$

$$P = P_{\text{Ch}} + P_C + P_{\text{TF}}, \quad (8)$$

其中  $\rho_{\text{Ch}}$  和  $P_{\text{Ch}}$  代表了 Chandrasekhar 模型，而  $P_C + P_{\text{TF}}$  是库仑相互作用和 Thomas-Fermi

修正压强, 可表达为

$$P_C + P_{TF} = -m_e c^2 \left( \frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \left[ \frac{\alpha Z^{2/3}}{10\pi^2} \left( \frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} x_r^4 + \frac{162}{175} \frac{(\alpha Z^{2/3})^2}{9\pi^2} \left( \frac{4}{9\pi} \right)^{2/3} \frac{x_r^5}{\sqrt{1+x_r^2}} \right], \quad (9)$$

其中  $\alpha$  为精细结构常数,  $Z$  为核电荷数。该模型称为 H&S 模型。

若考虑电子之间的交换、散射以及晶格化因素<sup>[40]</sup>, 白矮星的物态方程表示为 (该模型称为 C&F 模型)

$$\rho = \rho_N + \frac{m_e}{8\pi^2 \lambda_e^3} \left[ x_r (1 + 2x_r^2) \sqrt{1 + x_r^2} - \ln (x_r + \sqrt{1 + x_r^2}) \right] \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) - n_e m_e + C_M \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{e^2}{c^2} n_e^{4/3} Z_{\text{eff}}^{2/3}, \quad (10)$$

$$P = \frac{m_e c^2}{8\pi^2 \lambda_e^3} \left[ x_r \left( \frac{2}{3} x_r^2 - 1 \right) \sqrt{1 + x_r^2} + \ln (x_r + \sqrt{1 + x_r^2}) \right] \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) + \frac{C_M}{3} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} e^2 n_e^{4/3} Z_{\text{eff}}^{2/3}, \quad (11)$$

其中  $\rho_N$  是核子密度,  $C_M = -0.895929255682$  是 Madelung 常数<sup>[41]</sup>,  $\alpha/2\pi$  代表电子交换的修正,  $Z_{\text{eff}} = Z\sigma(Z)^{3/2}$  是有效核电荷数, 其中电子极化效应产生的修正项  $\sigma(Z)$  表示为

$$\sigma(Z) = 1 + \alpha \frac{12^{4/3}}{35\pi^{1/3}} (1 - 1.1866Z^{-0.267} + 0.27Z^{-1}) Z^{2/3}. \quad (12)$$

**图 3 展示了 C&F 物态模型与 Chandrasekhar 模型的关系。我们可以看到密度越大、核子越轻, 该模型与 Chandrasekhar 模型的差异越小。随着白矮星组分的核子质量数增加, C&F 模型在低密度和压强区显著偏离 Chandrasekhar 模型。**

晶格化白矮星的弹性性质可通过剪切模量来表示。**我们忽略电子极化对固态核心的影响, 因为白矮星内部电子气处于高度简并态, 电子的费米能远大于典型的库仑相互作用能, 导致电子背景的极化率显著降低, 其对离子运动的响应较弱, 可以近似视为一个相对均匀的中性化背景。故我们采用的剪切模量表达为<sup>[42]</sup>**

$$\mu = 0.119457234091 \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3}, \quad (13)$$

晶格化白矮星的剪切模量对振荡模式有重要的影响, 我们将在下一章节进行详细的讨论。

我们考虑静态、球对称模型, 在牛顿引力框架下流体静力学平衡方程为

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (14)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2} \rho(r), \quad (15)$$

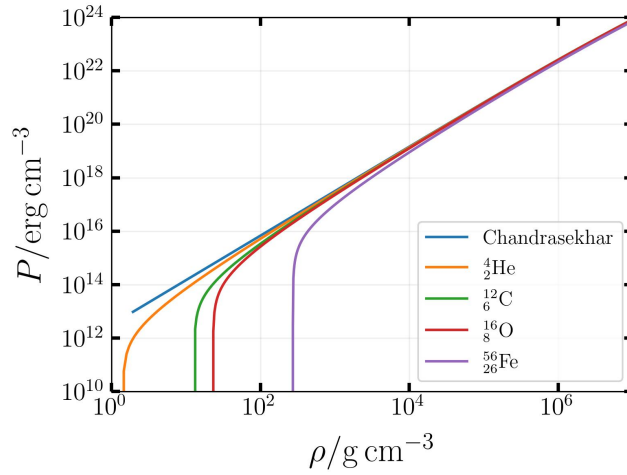


图 3 白矮星的 Chandrasekhar 模型与 C&F 模型的对比, 其中 C&F 模型取四种不同的元素组分。模型间的差异主要体现在低密度区: 相同密度下, Chandrasekhar 模型的压强最大, C&F 模型的压强随质子数  $Z$  的增大而减小;  $Z$  越大, 密度的下限越高。

再利用白矮星的物态方程, 可得到白矮星的质量半径关系, 数值结果如图 4 所示。我们发现, 对于一颗由 He、C 或 O 元素构成的白矮星, 它们的最大质量约为  $1.4M_{\odot}$ , 且质量和密度、半径的关系与简并电子气模型的计算结果没有明显差异。此外, 具有相同半径或者中心密度的白矮星, 其组分的原子序数越大, 白矮星质量就越小。

### 3 白矮星的振荡模式

通过对振荡模式的分析, 我们可探究白矮星的内部结构和物态方程。在 3.1 节中, 我们介绍了星震模式的线性微扰理论; 在 3.2 和 3.3 节中, 分别研究了白矮星的球型振荡和环型振荡模型, 并讨论了剪切模量对不同振荡模式的影响。

#### 3.1 星震模式: 线性微扰理论

白矮星内部的物质运动一般遵循流体力学基本方程组, 即

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \nabla \Phi = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (17)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (18)$$

晶格化白矮星核心的应力张量的拉格朗日扰动可以取为

$$\Delta \sigma_{ij} = (\Gamma_1 P_0 u_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk} \delta_{ij}), \quad (19)$$

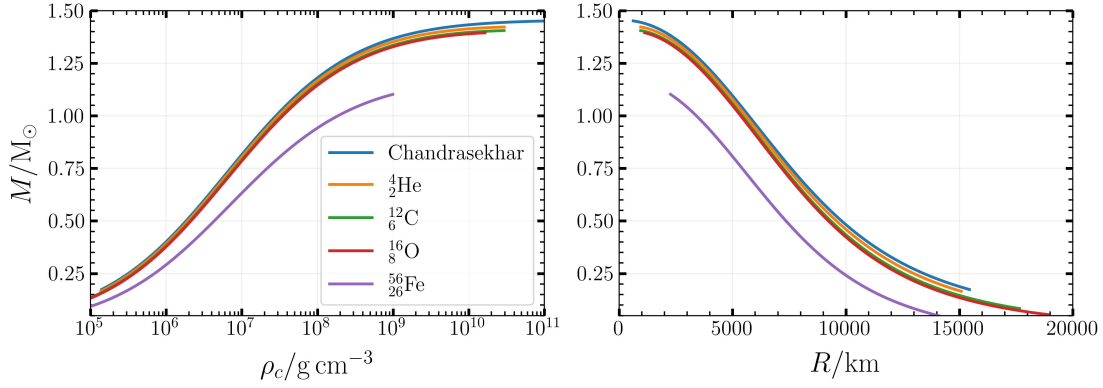


图 4 基于 Chandrasekhar 模型和 C&F 模型计算得到不同元素构成的白矮星的质量-中心密度关系和质量-半径关系。

其中角标 0 代表物理量在系统处于平衡时的值。 $\mu$  是剪切模量, 取式 (13) 的形式。 $u_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$  为应变张量, 描述体元的相对形变, 其中  $u_i$  为拉格朗日位移。式 (19) 右边第一项代表纯压缩或膨胀应力, 第二项代表纯剪切应力。

我们假定拉格朗日扰动对时间的依赖为  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ 。拉格朗日位移矢量场  $\boldsymbol{\xi}$  可通过矢量球谐函数  $\mathbf{Y}_{\ell m} \equiv Y_{\ell m} \hat{\mathbf{e}}_r$ ,  $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(p)} \equiv r \nabla Y_{\ell m}$ ,  $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(a)} \equiv \mathbf{r} \times \nabla Y_{\ell m}$  展开为

$$\boldsymbol{\xi} \equiv U(r)Y_{\ell m} \hat{\mathbf{e}}_r + V(r)r \nabla Y_{\ell m} - W(r)\mathbf{r} \times \nabla Y_{\ell m}, \quad (20)$$

其中

$$U(r)Y_{\ell m} \hat{\mathbf{e}}_r + V(r)r \nabla Y_{\ell m} \quad \text{称为球型振荡}, \quad (21)$$

$$-W(r)\mathbf{r} \times \nabla Y_{\ell m} \quad \text{称为环型振荡}. \quad (22)$$

### 3.2 球型振荡模式

#### 3.2.1 微扰方程

球型振荡模式的拉格朗日位移为

$$\xi_r = U(r)Y_{\ell m}, \quad (23)$$

$$\xi_\theta = V(r) \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta}, \quad (24)$$

$$\xi_\phi = \frac{V(r)}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi}, \quad (25)$$

应用如下代换<sup>[38, 43, 44]</sup>

$$y_1 = U, \quad (26)$$

$$y_2 = \lambda X + 2\mu \frac{dU}{dr}, \quad (27)$$

$$y_3 = V, \quad (28)$$

$$y_4 = \mu \left( \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} + \frac{U}{r} \right), \quad (29)$$

$$y_5 = -\delta \tilde{\Phi}, \quad (30)$$

$$y_6 = -\frac{d\delta \tilde{\Phi}}{dr} - 4\pi\rho U, \quad (31)$$

其中  $X = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 U) - \frac{\ell(\ell+1)}{r} V$ ,  $\lambda = \Gamma_1 P - \frac{2}{3}\mu$ ;  $y_1$  和  $y_3$  为径向和切向的位移,  $y_2$  和  $y_4$  代表径向和切向的受力变化,  $y_5$  和  $y_6$  是关于引力势的扰动和其导数。

最终, 微扰方程简化为<sup>[38, 43, 44]</sup>

$$y_1' = -\frac{2\lambda\beta}{r} y_1 + \beta y_2 + \frac{\ell(\ell+1)\lambda\beta}{r} y_3, \quad (32)$$

$$y_2' = \left[ -\rho\omega^2 - \frac{4\rho g}{r} + \frac{2\delta}{r^2} \right] y_1 - \frac{4\mu\beta}{r} y_2 + \ell(\ell+1) \left[ \frac{\rho g}{r} - \frac{\delta}{r^2} \right] y_3 + \frac{\ell(\ell+1)}{r} y_4 - \rho y_6, \quad (33)$$

$$y_3' = -\frac{1}{r} y_1 + \frac{1}{r} y_3 + \frac{1}{\mu} y_4, \quad (34)$$

$$y_4' = \left[ \frac{\rho g}{r} - \frac{\delta}{r^2} \right] y_1 - \frac{\lambda\beta}{r} y_2 + \left[ -\rho\omega^2 + \frac{\epsilon}{r^2} \right] y_3 - \frac{3}{r} y_4 - \frac{\rho}{r} y_5, \quad (35)$$

$$y_5' = 3\gamma G y_1 + y_6, \quad (36)$$

$$y_6' = -3\gamma G \frac{\ell(\ell+1)}{r} y_3 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} y_5 - \frac{2}{r} y_6, \quad (37)$$

其中  $\beta = (\lambda + 2\mu)^{-1}$ ,  $\gamma = \frac{4}{3}\pi\rho$ ,  $\delta = 2\mu(3\lambda + 2\mu)\beta$ ,  $\epsilon = 4\ell(\ell+1)\mu(\lambda + \mu)\beta - 2\mu$ 。

在白矮星的流体包层中, 剪切模量  $\mu = 0$ , 故  $\beta = \lambda^{-1}$ ,  $\delta = \epsilon = 0$ ,  $\lambda = \Gamma_1 P$ ,  $y_4 = 0$ 。此时方程组 (32-37) 可以简化为<sup>[38, 43]</sup>

$$y_1' = -\frac{2}{r} y_1 + \frac{1}{\lambda} y_2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r} y_3, \quad (38)$$

$$y_2' = -\left( \rho\omega^2 + \frac{4\rho g}{r} \right) y_1 + \frac{\ell(\ell+1)\rho g}{r} y_3 - \rho y_6, \quad (39)$$

$$y_5' = 4\pi G \rho y_1 + y_6, \quad (40)$$

$$y_6' = -\frac{4\pi G \rho \ell(\ell+1)}{r} y_3 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} y_5 - \frac{2}{r} y_6, \quad (41)$$

其中

$$\rho\omega^2 y_3 = \frac{\rho g}{r} y_1 - \frac{1}{r} y_2 - \frac{\rho}{r} y_5. \quad (42)$$

白矮星中心附近的边界条件可写为如下形式<sup>[38, 44]</sup>

$$y_1 = Ar^{\ell-1} + A'r^{\ell+1}, \quad (43)$$

$$y_2 = Br^{\ell-2} + B'r^{\ell}, \quad (44)$$

$$y_3 = Cr^{\ell-1} + C'r^{\ell+1}, \quad (45)$$

$$y_4 = Dr^{\ell-2} + D'r^{\ell}, \quad (46)$$

$$y_5 = Er^{\ell} + E'r^{\ell+2}, \quad (47)$$

$$y_6 = Fr^{\ell-1} + F'r^{\ell+1}, \quad (48)$$

系数  $A, B, C$  等由下式确定

$$A = \ell C, \quad (49)$$

$$B = 2\ell(\ell - 1)\mu C, \quad (50)$$

$$D = 2(\ell - 1)\mu C, \quad (51)$$

$$E = 3\gamma C + \frac{F}{\ell}, \quad (52)$$

以及

$$C' = \frac{p_2}{p_1} D' + \frac{\rho}{p_1} \{F + [\omega^2 + (3 - \ell)\gamma]A\}, \quad (53)$$

$$B' = -q_1 C' + q_2 D', \quad (54)$$

$$A' = -\ell C' + \frac{1}{\mu} D', \quad (55)$$

$$E' = \frac{3\gamma}{2(2\ell + 3)} [(\ell + 3)A' - \ell(\ell + 1)C'], \quad (56)$$

$$F' = (\ell + 2)E' - 3\gamma A', \quad (57)$$

其中  $p_1 = 2\ell^2(\ell + 2)\lambda + 2\ell(\ell^2 + 2\ell - 1)\mu$ ,  $p_2 = \ell(\ell + 5) + \ell(\ell + 3)\frac{\lambda}{\mu}$ ,  $q_1 = 2\ell(\ell + 2)\lambda + 2\ell(\ell + 1)\mu$ ,  $q_2 = 2(\ell + 1) + (\ell + 3)\frac{\lambda}{\mu}$ 。

利用式 (43–57) 确定的星体中心取值, 可向外积分方程组 (32–37)。但当  $\ell \geq 1$  时, 为确保数值计算的精度,  $y'_2$ ,  $y'_4$  和  $y'_6$  需替换为其他形式, 详细讨论可见文献<sup>[38]</sup> 的附录 A。在星体固液连接处, 除  $y_3$  之外的变量均连续<sup>[38, 43]</sup>; 在星体表面, 边界条件为  $y_2 = 0$  和  $y_6 + \frac{\ell+1}{r}y_5 = 0$ 。

### 3.2.2 数值结果

图 5 展示了三种白矮星的晶格化半径与球型振荡频率之间的关系。左上图基于质子数  $Z = 6$ , 质量  $M = 0.6M_{\odot}$  的白矮星模型, 左下图基于  $Z = 2$ ,  $M = 0.2M_{\odot}$  的白矮星模型, 其中红色代表  $f$  模式, 即  $p$  模式的基频, 起源于压强; 蓝色代表  $i$  模式 (起源于固液转换界面) 或  $s$  模式 (起源于固态核心的弹性)。可以看出,  $Z$  更大、质量更大的白矮星模型,  $f$

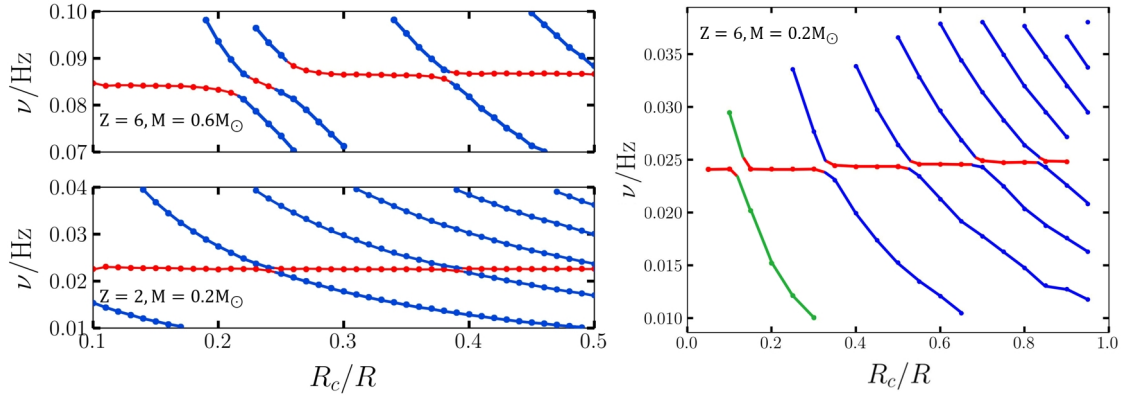


图 5 白矮星的晶格化半径与球型振荡频率的关系。左上图: 质子数  $Z = 6$ , 质量  $M = 0.6M_{\odot}$  的白矮星模型; 左下图:  $Z = 2, M = 0.2M_{\odot}$  的白矮星模型。红色代表  $f$  模式, 蓝色代表  $i$  模式或 (不同阶的)  $s$  模式。右图:  $Z = 6, M = 0.2M_{\odot}$  的白矮星模型, 红色、绿色和蓝色分别标记了  $f$  模式、 $i$  模式和 (不同阶的)  $s$  模式。

模式频率更高。右图基于  $Z = 6, M = 0.2M_{\odot}$  的白矮星模型。当晶格化半径  $R_c \rightarrow 0$  时, 不存在  $i$  和  $s$  模式。

我们的星体模型没有考虑组分的变化, 所以没有产生  $g$  模式。Montgomery 等人讨论过晶格化对  $g$  模式的影响<sup>[45]</sup>: 当剪切回复力超过流体的回复力, 即  $\mu/(\rho\omega^2h^2) \geq 1$  时 ( $h \equiv P/|dP/dr|$ ), 认为  $g$  模式无法有效地在固态核心中传播。他们的计算发现  $\mu/(\rho\omega^2h^2) > 10^{10}$ , 因此  $g$  模式将被完全限制在白矮星的流体区域中。 $g$  模式振荡周期由如下公式给出<sup>[45, 46]</sup>

$$P_n \sim n\langle\Delta P\rangle, \quad \langle\Delta P\rangle = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[ \int_{r_1}^{r_2} \frac{Ndr}{r} \right]^{-1}, \quad (58)$$

其中  $\langle\Delta P\rangle$  为相邻径向阶数  $n$  的振荡周期间隔。晶格化使积分下限  $r_1$  升高, 故我们可以预期  $\langle\Delta P\rangle$  和  $P_n$  均会升高。

我们从图 5 中发现一个有趣的现象是, 随着晶格化半径的增大, 不同模式之间产生了交叉过渡区 (avoided crossing): 对  $Z = 2, M = 0.2M_{\odot}$  的白矮星 (图 5 左下),  $f$  模式在  $R_c = 0.24R$  和  $R_c = 0.39R$  处与来自“上方”的  $s$  模式交叉。在交叉的位置,  $f$  模式频率会先略微降低; 通过交叉过渡区时,  $f$  模式频率不连续地跃升, 而后略微降低, 并以稍高于进入时的频率平稳离开交叉过渡区。这种现象在  $Z = 6, M = 0.6M_{\odot}$  的白矮星 (图 5 左上) 中体现得更加明显: 在  $R_c = 0.21R$ 、 $R_c = 0.26R$  和  $R_c = 0.38R$  处,  $f$  模式先降低再升高的幅度明显更大; 而与更高阶的  $s$  模式交叉时, 频率升高量变小。对于  $Z = 6, M = 0.2M_{\odot}$  的白矮星 (图 5 右), 同样具有类似的规律。 $f$  模式频率的变化可由  $\mu/P$  估计<sup>[45]</sup>, 对于我们考虑的模型,  $f$  模式频率变化约为千分之一至百分之一。

基于  $Z = 6, M = 0.6M_{\odot}$  和  $Z = 2, M = 0.2M_{\odot}$  的白矮星模型, 我们分别画出了  $f$  和

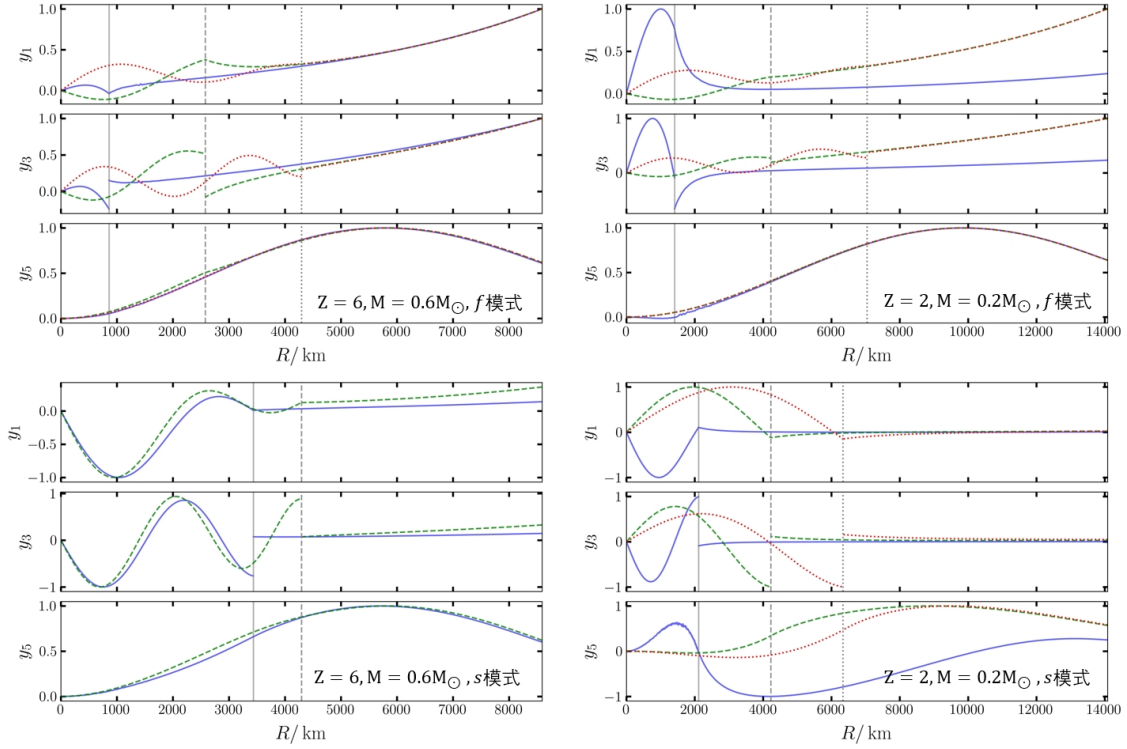


图 6 白矮星不同晶格化半径下  $f$  和  $s$  模式的本征函数  $y_1$ 、 $y_3$  和  $y_5$  的轮廓。考虑的两白矮星模型为  $Z = 6, M = 0.6M_{\odot}$  和  $Z = 2, M = 0.2M_{\odot}$ 。竖直灰色线代表晶格化半径, 本征函数的相同线型 (实线、虚线、点线) 和颜色代表它们来自同一线型的同一晶格化半径的内外两侧。

$s$  模式的本征函数, 见图 6。 $y_1$  和  $y_3$  分别对应振荡的径向和切向位移;  $y_5$  代表引力势的扰动。图中灰色竖直线代表晶格化核心半径, 即固液交界处。对于  $f$  模式 (左上和右上图), 可以看到径向位移  $y_1$  和切向位移  $y_3$  在流体包层中是单增的, 和纯流体构成的恒星内部规律一致。在固液交界处,  $y_1$  连续, 而  $y_3$  显示出不连续性。对于  $s$  模式 (左下和右下图), 可以看到固态核心的振荡显著强于流体包层内的, 这体现了  $s$  模式起源于固态核心的剪切模量。引力势扰动  $y_5$  及其导数均连续。

在双星系统中, 动力学潮汐可能会显著激发白矮星的  $f$  模式, 尤其是在双星演化末期。我们的计算结果给出,  $f$  模式的振幅倾向于在恒星表面处取极值, 故该模式的振幅易受到潮汐扰动的影响。对于处在特定轨道周期内的高温白矮星 ( $T > 1.4 \times 10^4$  K), 这种扰动所致的观测流量变化可大于 1%<sup>[49]</sup>。Fuller 等人<sup>[50]</sup> 通过数值求解发现, 潮汐力使振荡模式的对称轴从白矮星的自转轴转向潮汐轴, 并使  $f$  模式在潮汐极点附近的扰动增强。这种机制使观测到的振幅和相位随轨道相位调制, 成功对“潮汐倾斜脉动星”(如 HD 74423<sup>[51]</sup>, CO Cam<sup>[52]</sup> 和 TIC 63328020<sup>[53]</sup>) 的观测现象进行了解释。未来通过分析光变曲线的振幅调制, 有望推

断  $f$  模式的空间分布及潮汐对齐程度。另一方面,在双星系统演化的末期,晶格化导致的潮汐形变特征和  $f$  模式频率变化会体现在辐射的引力波信号中,会影响人们对此类系统引力波信号的理解。

### 3.3 环型振荡模式

在上一节中,我们详细探讨了球型振荡模式。本节将重点讨论由白矮星固态组分引起的环型振荡模式 ( $t$  模式),这种模式源于固态核心的剪切模量。

#### 3.3.1 微扰方程

环型振荡的拉格朗日位移为

$$\xi_r = 0, \quad (59)$$

$$\xi_\theta = \frac{W(r)}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\phi}, \quad (60)$$

$$\xi_\phi = -W(r) \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\theta}. \quad (61)$$

利用代换  $y_7 = W$ 、 $y_8 = \mu(W' - \frac{W}{r})$ , 可得到微扰方程组为

$$y_7' = \frac{y_7}{r} + \frac{y_8}{\mu}, \quad (62)$$

$$y_8' = \left[ -\omega^2 \rho r + \frac{\mu(\ell^2 + \ell - 2)}{r} \right] \frac{y_7}{r} - \frac{3}{r} y_8, \quad (63)$$

其中  $y_7$  为切向微扰位移,  $y_8$  为切向的受力变化。**在星体中心,  $y_7 = 0$ ; 在星体表面,  $y_8 = 0$ ; 在固液交界面,  $y_8$  连续。**

#### 3.3.2 数值结果

我们利用上节所述边界条件,数值求解方程 (62) 和 (63), 得到晶格化白矮星  $n = 0$ ,  $\ell = 2$  的  $t$  模式频率与晶格化半径的关系, 见图 7。结果表明, **对单一组分的白矮星**,  $t$  模式的频率随着晶格化核心半径的增加而减小, 且白矮星的质量越大、**组分质子数越大**, 其振荡频率越高。这一现象与基态  $n = 0$  的剪切波在固态核心中的传播频率的估计一致, 即频率近似为剪切波的速度  $v_s^2 = \mu/\rho$  与固态核心尺度的比值。由于质量较大的白矮星尺度较小, 因此振荡频率也相应更高。

在图 8 中, **我们基于质量为  $0.2M_\odot$ ,  $Z = 2$  和质量为  $0.6M_\odot$ ,  $Z = 6$  的两个白矮星模型**, 画出了  $\ell = 2$ , 阶数  $n$  变化时  $t$  模式频率与固态核心半径的关系, 其中最下面一族红色散点为  $n = 0$  的基频模式。随着阶数  $n$  的增大, 频率升高, 而频率间隔逐渐减小并趋于等距, 印证了  $t$  模式具有类似于  $p$  模式的渐近关系  $\omega_n \sim n\pi/(\int dr/v_s)^{[45]}$ 。

**我们还基于这两个白矮星模型, 计算得到了不同  $n$  的本征函数  $y_7$  (切向位移) 与晶格化核心半径的关系。在图 9 中, 我们画出了三组不同晶格化半径 ( $R_c = 0.25R, 0.5R, 0.75R$ ) 的本征函数**, 竖直蓝色虚线标记着晶格化核心半径与外部流体包层的交界面, 每个函数都由其最大绝对值归一。**可以看出, 振荡轮廓对白矮星模型的选择并不敏感。** 本征函数的零点数量代表阶数  $n$ , 当  $n = 1$  时横向位移只有一个径向节点, 节点两侧的振荡方向相反。在固

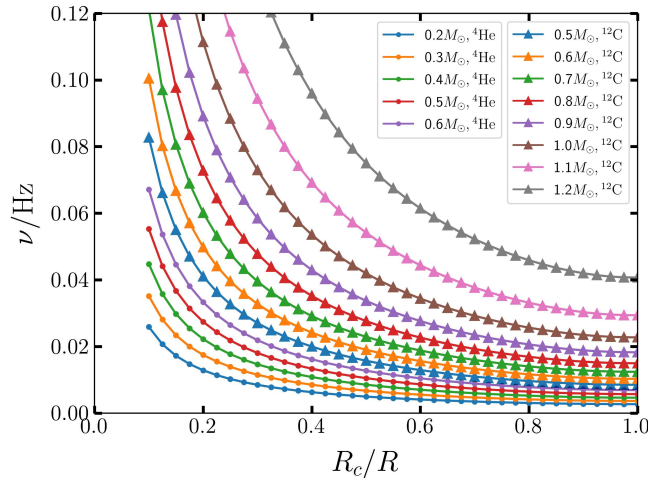


图 7 白矮星的环型振荡模式频率与晶格化半径的关系。圆形标记代表质子数  $Z = 2$  的白矮星模型, 质量取  $0.2M_{\odot} \sim 0.6M_{\odot}$  (考虑到  ${}^4\text{He}$  白矮星的最大质量可能达到  $0.51M_{\odot}$ <sup>[48]</sup>); 三角形标记代表质子数  $Z = 6$  的白矮星模型, 质量取  $0.5M_{\odot} \sim 1.2M_{\odot}$ 。

液交界处, 核心一侧的振荡横向位移达到极值, 与外部流体包层没有耦合。随着阶数的增大, 频率升高 (图 8)。

晶格化白矮星的环型振荡频率与  $f$  模式频率量级一致。环型震荡可能通过双星演化末期的潮汐共振激发, 双星并合前白矮星的剧烈形变可能显著增强环形模式振幅, 而模式耗散 (粘滞阻尼) 导致振幅快速衰减。这些过程会体现在双星产生的低频引力波中, 其特征频率处于激光干涉空间天线<sup>[47]</sup> (Laser Interferometer Space Antenna, LISA) 的敏感频段内, 未来有望结合引力波和光学观测研究证实。

## 4 总结与展望

本文首先回顾了白矮星和星震学的研究背景, 而后讨论了白矮星的晶格化对振荡模式和振荡频率的影响。随着白矮星的冷却, 晶格化会影响球型模式的振荡频率和位移轮廓, 并产生一种新的振荡模式 (环型模式)。我们基于第 2 章中的 C&F 物态模型, 计算了不同元素组分下白矮星的质量、压强等物理量随半径的变化关系, 并基于线性微扰理论计算了振荡频率与振荡位移的轮廓。对于球型模式, 晶格化对不同模式的振荡频率有不同的影响:  $f$  模式受晶格化的影响较小 (百分之一量级), 而固态核产生的  $s$  和  $i$  模式的振荡频率会随着核心增大而显著减小。在双星系统演化的末期, 晶格化使潮汐形变特征和  $f$  模式频率改变, 这种变化会体现在系统辐射的引力波信号中, 晶格化会影响人们对此类系统引力波信号的理解。

对于环型模式, 它是晶格化产生的独特结果, 它的频率随着核心半径增大而显著减小, 随着白矮星总质量的增大而显著增大。环型模式由于没有径向位移, 在线性近似下, 核心的

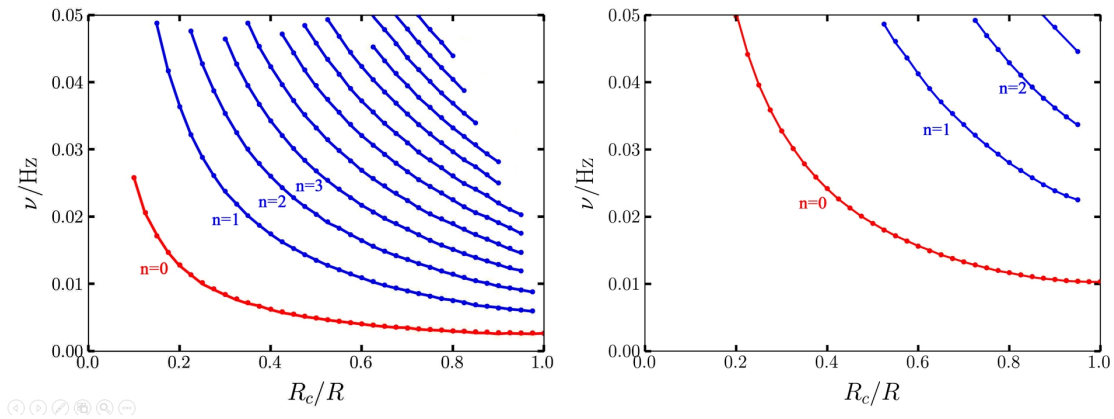


图 8 白矮星的晶格化半径与不同阶数  $n$  (固定  $\ell = 2$ ) 的环型模式频率的关系。左图: 质量为  $0.2M_{\odot}$ ,  $Z = 2$  的白矮星; 右图: 质量为  $0.6M_{\odot}$ ,  $Z = 6$  的白矮星。

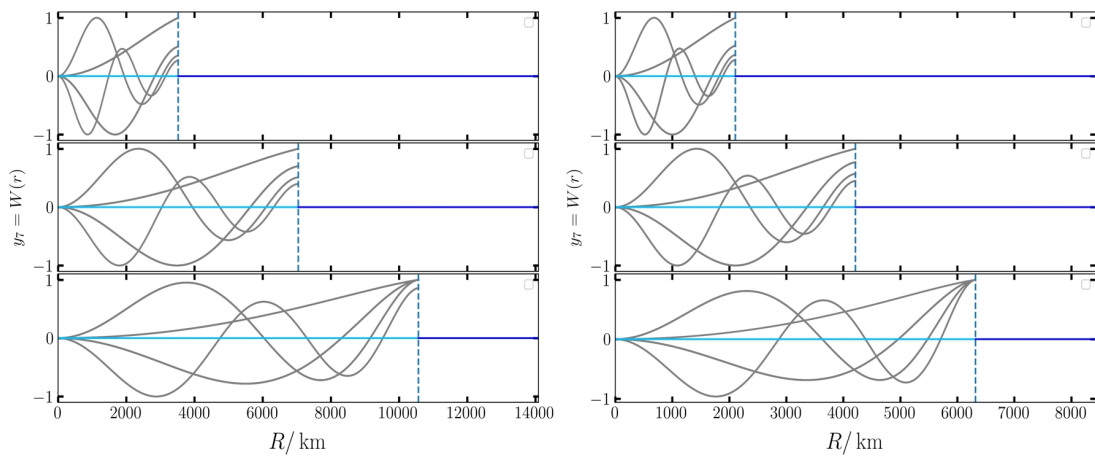


图 9 白矮星在不同晶格化半径 ( $R_c = 0.25R, 0.5R, 0.75R$ ) 下环型振荡的本征函数  $y_r$ 。左图: 质量为  $0.2M_{\odot}$ ,  $Z = 2$  的白矮星; 右图: 质量为  $0.6M_{\odot}$ ,  $Z = 6$  的白矮星。晶格化半径处由竖直蓝色虚线标记。每个函数都由其最大绝对值归一。阶数  $n$  由节点数量确定, 并固定  $\ell = 2$ 。

振荡与流体包层没有耦合, 因此这种波动无法传递至表面, 通常难以进行观测验证。而当白矮星演化足够久, 以至于晶格化延伸到表层, 我们就可以期望通过光学观测获得环型模式的振荡频率, 从而研究晶格化和相分离过程, 这对减小白矮星光度函数的系统不确定性有帮助, 进而影响到对银盘年龄的估计。再者, 相分离会影响白矮星核心的化学组成, 进而影响到 Ia 型超新星的观测特征<sup>[45]</sup>。

在密近双白矮星系统中,  $f$  模式和  $g$  模式受到潮汐激发, 双星产生的低频 ( $\lesssim 10^{-2}$  Hz) 引力波受到潮汐共振的强烈影响, 可被 LISA 探测到<sup>[54, 55]</sup>。此外, 双星系统中的白矮星可能演化时间足够久, 以至于部分或完全晶格化<sup>[9, 56]</sup>, 晶格化白矮星的振荡特征受潮汐作用影响, 因此通过光学和引力波探测来研究晶格化白矮星的振荡模式对人们理解白矮星结构、白矮双星演化也有重要意义。

### 参考文献:

- [1] Fowler R H. MNRAS, 1926, 87:114
- [2] Chandrasekhar S. MNRAS, 1935, 95:676
- [3] Winget D E, Kepler S O. ARA&A, 2008, 46:157
- [4] Mestel L. The Theory of White Dwarfs. In: Aller L H, McLaughlin D B, eds. Stellar Structure - Stars and Stellar Systems: Compendium of Astronomy and Astrophysics. Chicago: University of Chicago Press, 1965: 297
- [5] Mestel L, Ruderman M A. MNRAS, 1967, 136:27
- [6] Ostriker J P, Axel L, Kumar S. Low Luminosity Stars. ed. Kumar S. New York: Gordon & Breach, 1969:357
- [7] Eisenstein D J, Liebert J, Harris H C et al. ApJS, 2006, 167:40
- [8] McCook G P, Sion E M. ApJS, 1999, 121:1
- [9] van Horn H M. ApJ, 1968, 151:227
- [10] Stevenson D J. PASA, 1977, 3:167
- [11] Stevenson D J. JPhyC, 1980, 41:C2
- [12] Mochkovitch R. A&A, 1983, 122:212
- [13] Barrat J L, Hansen J P, Mochkovitch R. A&A, 1988, 199:L15
- [14] Garcja-Berro E, Hernanz M, Isern J, et al. Nature, 1988, 333:642
- [15] Winget D E, Kepler S O, Campos F, et al. ApJ, 2009, 693:L6
- [16] Bell N F, Busoni G, Robles S, et al. 2024, arXiv:2404.16272
- [17] Fuentes J R, Castro-Tapia M, Cumming A. ApJ, 2024, 964:L15
- [18] Bédard A, Blouin S, Cheng S. Nature, 2024, 627:286
- [19] Aerts C, Christensen-Dalsgaard J, Kurtz D W. Asteroseismology. Dordrecht: Springer Netherlands, 2010
- [20] Kurtz D. 2022, arXiv:2201.11629
- [21] Walker G, Matthews J, Kuschnig R, et al. PASP, 2003, 115:1023
- [22] Auvergne M, Bodin P, Boisnard L, et al. A&A, 2009, 506:411
- [23] Koch D G, Borucki W J, Basri G, et al. ApJL, 2010, 713:L79
- [24] Ricker G R, Winn J N, Vanderspek R, et al. JATIS, 2015, 1:014003
- [25] Aerts C, Tkachenko A. arXiv:2311.08453
- [26] Hanasoge S, Gizon L, Sreenivasan K R. AnRFM, 2016, 48:191
- [27] Houdek G, Balmforth N J, Christensen-Dalsgaard J, et al. A&A, 1999, 351:582
- [28] Samadi R, Georgobiani D, Trampedach R, et al. A&A, 2007, 463:297
- [29] Chaplin W J, Kjeldsen H, Christensen-Dalsgaard J, et al. Sci, 2011, 332:213

- 
- [30] Winget D E, Nather R E, Clemens J C, et al. *ApJ*, 1991, 378:326
- [31] Costa J E S, Kepler S O. *A&A*, 2008, 489:1225
- [32] Alejandra D R, Kepler S O, Gabriela O R, et al. 2024, arXiv:2407.07260
- [33] Calcaferro L M, Sowicka P, Uzundag M, et al. *A&A*, 2024, 686:A140
- [34] Li H B, Gao Y, Shao L J, et al. *Univ*, 2024, 10(4):157
- [35] Hermes J J, Gänsicke B T, Kawaler S D et al. *ApJS*, 2017, 232:23
- [36] Giammichele N, Charpinet S, Fontaine G et al. *Nature*, 2018, 554:73
- [37] Charpinet S, Brassard P, Fontaine G et al. *A&A*, 2019, 632:A90
- [38] Tang Yat-To, Lin Lap-Ming. *MNRAS*, 2023, 521:926
- [39] Hamada T, Salpeter E E. *ApJ*, 1961, 134:683
- [40] Chamel N, Fantina A F. *PRD*, 2016, 93:063001
- [41] Baiko D A, Potekhin A Y, Yakovlev D G. *PRE*, 2001, 64:057402
- [42] Chugunov A I. *MNRAS Letters*, 2020, 500:L17
- [43] Alterman Z, Jarosch H, Pekeris C L, et al. *RSPSA. Mathematical and Physical Sciences*, 1959, 252:80
- [44] Crossley D J. *GeoJI*, 1975, 41:153
- [45] Montgomery M H, Winget D E. *ApJ*, 1999, 526:976
- [46] **Unno W, Osaki Y, Ando H, et al. *Nonradial Oscillations of Stars*. Tokyo: Univ. Tokyo Press, 1989**
- [47] Amaro-Seoane P, Andrews J, Arca Sedda M, et al. *LRR*, 2023, 26:2
- [48] Zhang X, Hall P D, Jeffery C S, et al. *MNRAS*, 2017, 474:427
- [49] Yu H, Fuller J, Burdge K B. *MNRAS*, 2020, 501:1836
- [50] Fuller J, Kurtz D W, Handler G et al. *MNRAS*, 2020, 498:5730
- [51] Handler G, Kurtz D W, Rappaport S A, et al. *NatAs*, 2020, 4:684
- [52] Kurtz D W, Handler G, Rappaport S A, et al. *MNRAS*, 2020, 494:5118
- [53] Rappaport S A, Kurtz D W, Handler G, et al. *MNRAS*, 2021, 503:254
- [54] Fuller J, Lai D. *MNRAS*, 2011, 412:1331
- [55] Kinugawa T, Takeda H, Tanikawa A, et al. *ApJ*, 2022, 938:52
- [56] Tremblay P-E, Fontaine G, Fusillo N P G, et al. *Nature*, 2019, 565:202

# Effects of Crystallization on Oscillation Modes of White Dwarfs

ZHAO Cheng-hui<sup>1,2</sup>, LI Hong-bo<sup>2</sup>, SHAO Li-jing<sup>2,3</sup>

(1. Department of Astronomy, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China; 2. Kavli Institute for Astronomy and Astrophysics, Peking University, Beijing 100871, China; 3. National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China)

**Abstract:** Oscillation modes of white dwarfs are significantly influenced by their physical states and internal structures. By analyzing oscillation spectra, we can probe the physical properties of white dwarfs, thereby providing insights into stellar evolution, Galactic disk age estimation, and Type Ia supernova progenitors. As white dwarfs gradually cool, first-order phase transitions occur in their ionic interiors, leading to crystallization. This crystallization process not only modulates the cooling evolution but also alters oscillation modes and associated observational signatures.

In this work we begin with an overview of the scientific significance of white dwarfs in physics and astronomy, followed by an introduction to the research background of white dwarf asteroseismology. Furthermore, we analyze the mass-radius relations based on diverse equations of state for white dwarfs. Finally, a detailed investigation is conducted on their spheroidal and torsional oscillation modes. The results demonstrate that crystallization induces novel spheroidal oscillation modes—specifically, interface modes ( $i$  modes) and shear modes ( $s$  modes)—while elevating the frequencies of fundamental modes ( $f$  modes). For torsional oscillations, crystallization establishes a pronounced correlation between oscillation frequencies and the core radius and mass of white dwarfs. Additionally, the study reveals the relationship between oscillation eigenfunctions and core radius, strengthening the physical interpretation of white dwarf oscillations. These results deepen our comprehension of the interplay between crystallized cores and oscillation dynamics in white dwarfs.

**Key words:** White Dwarf; Crystallization; Equation of State; Asteroseismology; Oscillation mode