

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.0000-0000

基于 FARROW 结构分数滤波器的 VLBI 相关处理算法研究

陆 健^{1,2}, 童 力^{1,3,4}, 郑为民^{1,3,4}, 芮 萍^{1,3,4}, 陈 中^{1,3,4}

(1. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030; 2. 中国科学院大学, 北京 100049; 3. 中国科学院 射电天文重点实验室, 北京 100101; 4. 上海市空间导航与定位技术重点实验室, 上海 200030)

摘要: 相关处理是 VLBI 数据处理的重要步骤, 在条纹旋转之前进行分数时延补偿的相关结果, 理论上具备更高的精度, 而现有主流相关处理机分数时延补偿在频域实现, **计算开销较大, 且补偿方式不够灵活**。本文通过研究并实现基于 Farrow 结构分数滤波器的 VLBI 相关处理算法, 该算法在条纹旋转之前完成分数时延补偿, 并且可以在时域动态适应分数时延的变化并**提高计算效率**。通过处理嫦娥六号实测数据, 验证了该方法的有效性, **相比频域补偿的方式, 该方法节约了 23% 的计算开销, 同时在处理精度上与频域补偿的方式一致, 且分数时延补偿更加连续**。

关键词: 相关处理机; 分数时延补偿; Farrow 分数时延滤波器

中图分类号: P111.44 **文献标识码:** A

1 引言

甚长基线干涉测量 (Very Long Baseline Interferometry, VLBI) 技术是一项高分辨率、高测量精度的观测技术, 广泛应用于天体物理、天体测量和深空探测等领域^[1]。VLBI 的关键技术指标之一是角分辨率^[2], 表示为

$$\theta \approx \frac{\lambda}{B} \quad (1)$$

其中 θ 是角分辨率, λ 是波长, B 是基线长度, 即两台射电望远镜之间的距离。地基 VLBI 由地面射电望远镜构成, 基线长度小于地球直径, 为了获得更高的角分辨率, 空间 VLBI 是未来 VLBI 重要的发展方向之一, 如我国的 LOVEX (Lunar Orbit VLBI Experiment, LOVEX) 项目将射电望远镜发射到太空, 与地面射电望远镜构成空地基线, 其地月基线长度可以远超地球直径, 实现极高的角分辨率。相关处理机是 VLBI 数据处理的核心设备, 根据相关处理

资助项目: 国家重点研发计划资助 (2022YFC2205203)

通讯作者: 童力, tongli@shao.ac.cn

流程中数据相乘 (X) 和傅里叶变换 (F) 的先后次序不同, 相关处理机可以分为 XF 和 FX 两种类型, 在处理精度和计算复杂度上, FX 型均优于 XF 型^[3, 4]。另外根据计算平台的不同, 相关处理机又可以分为软件相关处理机和硬件相关处理机, 随着近二十年通用计算技术的飞速发展, 软件相关处理机已经逐步替代硬件相关处理机, 成为 VLBI 数据处理的主流设备。

现有主流软件相关处理机, 如澳大利亚斯威本科技大学 (Swinburne University of Technology) 开发的 DiFX(Distributed FX)^[5] 处理机, 上海天文台研发的 CVN(Chinese VLBI Network) 软件相关处理机^[6], 以及由 JIVE(Joint Institute for VLBI in Europe) 研发的 SFXC(Super FX Correlator)^[7] 等均采用 FX 型结构。软件相关处理机数据处理分为多个步骤: 解码和时延补偿、条纹旋转、傅里叶变换、共轭相乘并积分。由于天线的记录信号是数字信号, 所以时延分为采样周期整数倍的整数时延和采样周期非整数倍的分数时延。整数时延通过采样间隔平移补偿, 对于分数时延 τ_f , 上述软件相关处理机采用频域补偿的方式, 对信号 $f(t)$ 做傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

补偿时延 τ_f 后

$$F_{\tau_f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau_f)e^{-i\omega t} dt = F(\omega)e^{-i\omega\tau_f} \quad (3)$$

因此由分数时延 τ_f 造成的相位误差

$$\phi_{frac} = 2\pi\tau_f\nu \quad (4)$$

其中 ν 是信号的频率, 可以通过傅里叶变换后乘以 $e^{-i\phi_{frac}}$ 补偿。但上述软件处理机在分数时延补偿流程上存在差异, DiFX 和 CVN 处理机在条纹旋转后两路信号共轭相乘前进行分数时延补偿, DiFX 和 CVN 相关处理流程如图1

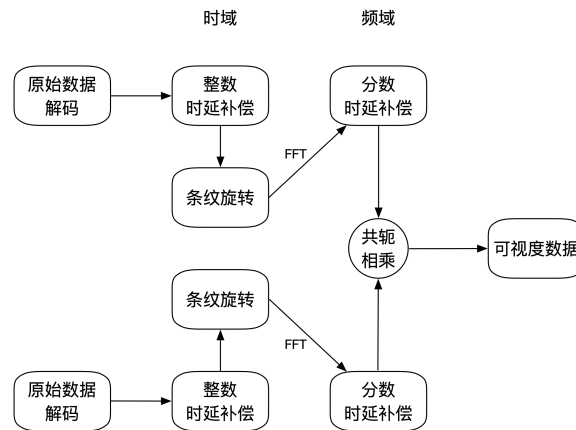


图 1 DiFX 和 CVN 相关处理流程^[8]

SFXC 不同之处是在条纹旋转之前进行了分数时延补偿, SFXC 相关处理流程如图2, 由于分数时延在频域补偿, 会涉及到两次傅里叶变换, 计算开销较大。但在条纹旋转之前完成了分数时延补偿, 条纹旋转基于精确时延补偿的结果, **相关结果理论上更加精确。**

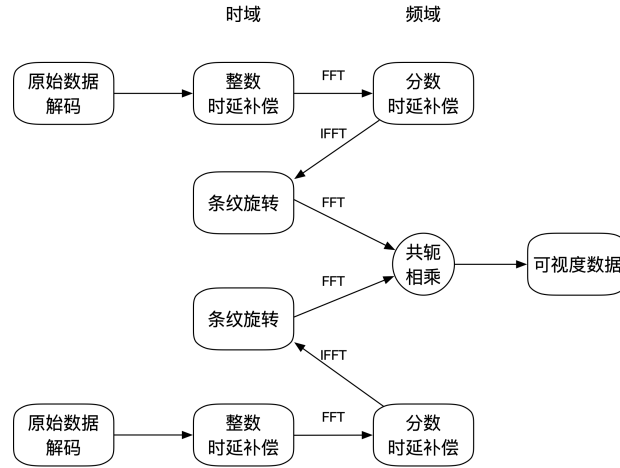


图 2 SFXC 相关处理流程^[4]

频域补偿存在一定局限性, 在实际处理中, 补偿过程被分为若干个傅里叶变换周期, 每个周期仅对分数时延进行一次固定补偿。当傅里叶变换周期内出现多次分数时延变化时, 无法进行多次补偿; 而对于多个具有相同分数时延的傅里叶变换周期, 也无法进行合并优化处理。对于地基 VLBI, 时延变化较小, 采用频域补偿方式能够适应分数时延的动态变化。然而, 在空间 VLBI 数据处理中, 时延及时延率的变化与地基 VLBI 存在数量级上的差异, 表1对比了地基 VLBI 与空间 VLBI 在时延、时延率及时延率的变化率等方面的差异, 因此采用固定傅里叶变换周期补偿的方式并非最优选择。

表 1: 地基 VLBI 和空间 VLBI 在时延 τ_g 、时延率 $\dot{\tau}$ 和时延率的变化率 $\ddot{\tau}$ 方面的对比^[9]

	$\tau_g(s)$	$\dot{\tau}(\mu s/s)$	$\ddot{\tau}(ns/s^2)$
地基 VLBI	21×10^{-3}	3	0.1
空间 VLBI	1	>30	>2

Farrow 结构是一种基于多项式插值滤波的技术, 其核心思想是每个用于实现分数时延补偿的滤波器系数都由分数时延 τ 的 M 阶多项式构成。通过这种方式, 分数时延变化时无需重新计算滤波器系数, 从而能够实时响应分数时延的动态变化, 实现连续的补偿效果。此外, Farrow 滤波器在时域内完成分数时延补偿, 相较于频域补偿方式, 计算效率更高。本文提出了一种基于 Farrow 滤波器的相关处理算法, 改进了分数时延补偿效果, **可以灵活响应**

分数时延的变化，并在条纹旋转之前完成了分数时延补偿。

文章第二节将对分数时延滤波器和 Farrow 结构分数时延滤波器在原理和设计方面进行详细描述，第三节进行相关理论分析，第四节通过实现相关算法，对嫦娥六号实测数据进行相关处理并分析结果。

2 Farrow 结构分数时延滤波器设计

本节进行分数时延滤波器和 Farrow 结构滤波器在原理、设计和性能等方面的分析，在完成 Farrow 滤波器系数求解后，根据时延模型计算分数时延，通过改变输入滤波器的分数时延可以在时域高效完成分数时延补偿。

2.1 分数时延滤波器

对于模拟信号（连续时间信号）来说，时延 τ 是一个连续的量，也就不需要进行分数时延补偿，但是在数字信号（离散时间信号）的处理中，时延只有是采样周期的整数倍时，可以通过采样间隔平移来补偿时延；当时延是采样周期的非整数倍时，时延 τ 包含了整数倍采样周期的整数时延 τ_i 和分数倍采样周期的分数时延 τ_f ，整数时延 τ_i 可以通过采样间隔平移补偿，分数时延 τ_f 需要使用误差逼近的方式补偿。理想时延滤波器的频率响应

$$H_{id}(\omega, \tau) = e^{-i\omega\tau} \quad (5)$$

通过傅里叶逆变换得到冲击响应

$$h_{id}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(\omega, \tau) e^{i\omega n} d\omega = \frac{\sin[\pi(n - \tau)]}{\pi(n - \tau)} = \text{sinc}(n - \tau) \quad (6)$$

当 τ 取分数时，冲激响应呈现无限冲激响应的特点，而且是非因果的，这在实际处理中很难实现，因此只能使用有限冲激响应 (Finite Impulse Response, FIR) 来近似理想响应的效果，这是加窗法的主要思想。滤波器系数是传递函数中的参数，在时域中，滤波器系数直接对应于滤波器的冲激响应。有限冲激响应 $h(n)$ ($n = -N, 1, \dots, N$)，滤波器阶数为 $2N + 1$ ，滤波器系数为

$$h[n] = \frac{\sin[\pi(n - \tau_f)]}{\pi(n - \tau_f)}, n = -N, N + 1, \dots, N \quad (7)$$

有限冲激响应 $h(n)$ 的傅里叶变换 $H(\omega, \tau)$

$$H(\omega, \tau) = \sum_{n=-N}^N h(n) e^{-i\omega n T} \quad (8)$$

T 是采样间隔。通过与理想频率响应 $H_{id}(\omega, \tau)$ 做差来衡量近似的效果^[10]

$$E(\omega, \tau) = H_{id}(\omega, \tau) - H(\omega, \tau) \quad (9)$$

相比频域补偿的方式, FIR 滤波器在时域补偿具有更高的效率, 图3通过处理一条基线 2 个台站 1 秒时长的仿真数据对比了二者的计算效率。使用滤波器卷积和快速傅里叶变换的计算复杂度都是 $O(N \log_2 N)$, 而频域补偿的方式需要做两次傅里叶变换, 相比滤波器补偿的方式更加耗时。使用 FIR 滤波器的缺点是对于不同的分数时延 τ_f , 需要产生不同的滤波器系数, 即分数时延改变时需要重新计算滤波器系数, 所以这种方式适用于分数时延不变的情况, 而 Farrow 结构的分数时延滤波器可以很好的解决 VLBI 数据处理中分数时延动态变化的问题。

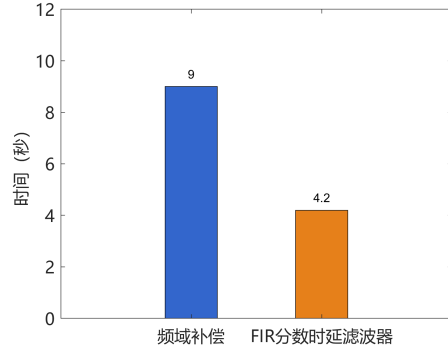


图 3 频域补偿方式和滤波器补偿方式耗时对比

2.2 Farrow 结构的原理

根据前文所述, 理想分数时延滤波器的频率响应为

$$H_{id}(\omega, \tau) = e^{-i\omega\tau}, \omega \in [0, \pi], \tau \in (-0.5, 0.5) \quad (10)$$

Farrow 滤波器的传递函数为^[11]

$$H_f(z, \tau) = \sum_{n=-N}^N \hat{h}_n(\tau) z^{-n} \quad (11)$$

加窗法是根据不同的逼近准则求出相应的滤波器系数 $\hat{h}_n(\tau)$, 而 Farrow 结构是采用 M 阶 τ 的多项式来构成滤波器系数 $\hat{h}_n(\tau)$

$$\hat{h}_n(\tau) = \sum_{m=0}^M h(n, m) \tau^m \quad (12)$$

将系数 $\hat{h}_n(\tau)$ 代入传递函数 $H_f(z, \tau)$

$$H_f(z, \tau) = \sum_{n=-N}^N \left[\sum_{m=0}^M h(n, m) \tau^m \right] z^{-n} = \sum_{m=0}^M \left[\sum_{n=-N}^N h(n, m) z^{-n} \right] \tau^m \quad (13)$$

通过式 (13) 可知 $H_f(z, \tau)$ 实际上是分数时延 τ 对 M 个滤波器组输出的加权和。Farrow 滤波器结构如图4所示

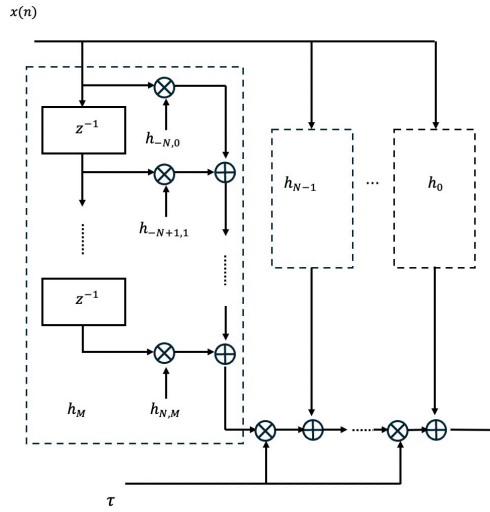


图 4 Farrow 滤波器结构图

从上述结构图中可以看出，只需要输入不同的分数时延 τ 就可以改变补偿的时延值，不需要每次重新计算 $h(n, m)$ ，因为分数时延独立于具体的滤波器系数，所以非常适合分数时延动态变化的场景。此外这种结构还十分有利于精度控制，时延补偿精度取决于输入滤波器的时延精度和滤波器阶数，时延计算越精确、滤波器阶数越高则时延补偿效果越好。

2.3 Farrow 滤波器系数求解

Farrow 系数求解需要定义 Farrow 结构滤波器频率响应与理想分数时延滤波器频率响应的误差函数

$$J = \int_0^\pi \int_{-0.5}^{0.5} |\hat{H}(\omega, \tau) - H_{id}(\omega, \tau)|^2 d\omega d\tau \quad (14)$$

其中 $\hat{H}(\omega, \tau)$ 是式 (13) 通过符号变换得到

$$\begin{aligned} \hat{H}(\omega, \tau) &= \sum_{m=0}^M \left[\sum_{n=-N}^N h(n, m) e^{-in\omega} \right] \tau^m \\ &= \sum_{m=0}^M h(0, m) \tau^m + \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N [h(-n, m) e^{in\omega} + h(n, m) e^{-in\omega}] \end{aligned} \quad (15)$$

因为分数时延滤波器系数具有对称性，所以

$$h(-n, m) = \begin{cases} h(n, m) & n = 2k \\ -h(n, m) & n = 2k + 1 \end{cases} \quad \text{其中 } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

根据上述定义, Farrow 系数的求解过程就是找合适的 $h(n, m)$ 使得 J 值最小。Farrow 分数时延滤波器系数有多种求解方式, 如文章^[12] 采用的最小二乘法求解滤波器系数, 考虑到分数时延滤波器系数对称的特性, 采用文章^[13] 对称求解的方式较为方便。

2.4 滤波器性能评估

图5对 3 次 23 阶 Farrow 结构分数时延滤波器组的性能进行了评估, 通过分析分数倍采样间隔下的频率响应, 幅度响应和相位时延在截止频率范围内具有良好的线性。在截止频率内, 滤波器可以产生稳定的相位时延, 符合设计需求。线性相位可以有效保留相位信息, 但是线性范围有限, 在超出截止频率后, 都趋向于整数时延点, 如果滤波信号包含高频成分, 相应的滤波器阶数则需要增加。

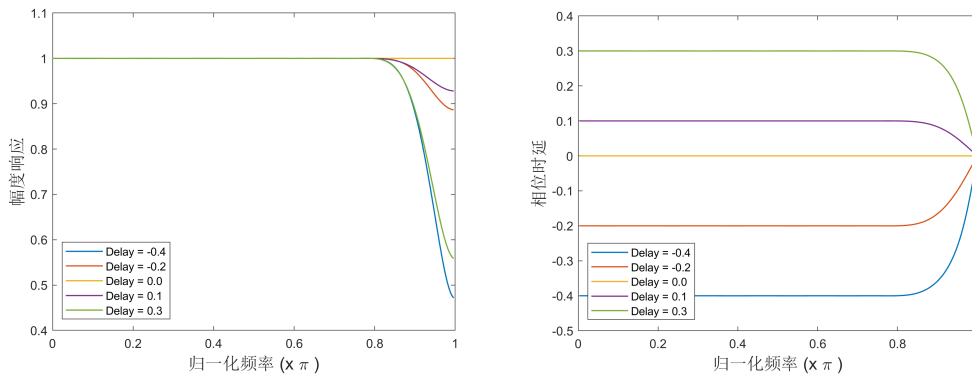


图 5 滤波器幅频响应分析

3 基于 Farrow 滤波器的相关处理算法

基于 Farrow 滤波器的相关处理流程如图6: 解码和整数时延补偿、分数时延滤波补偿、条纹旋转、傅里叶变换、共轭相乘并积分。首先对不同天线的记录信号进行解码和时延补偿, 由于是数字信号, 所以需要把时延 τ 的补偿分为采样周期整数倍的整数时延补偿和采样周期非整数倍的分数时延补偿

$$\tau = \tau_i + \tau_f \quad (17)$$

对于整数时延 τ_i , 根据采样率 FS 进行取整然后移位进行补偿

$$\tau_i = [FS \cdot \tau] / FS \quad (18)$$

对于分数时延 τ_f , 通过滤波的方式进行补偿, 分数时延通过时延模型计算得出, 时延模型是一个用于计算时延的五次多项式, 多项式系数由观测目标和传播介质等因素决定。计算分数

时延后输入滤波器，将滤波器系数和信号分段卷积完成分数时延补偿，时延补偿后的数据经过线性组合后输出；条纹旋转用来消除对基频信号进行时延补偿而引入的相位误差

$$\phi_{frot} = 2\pi\nu_{sky}\tau \quad (19)$$

需要在时域对信号乘以 $e^{-i\phi_{frot}}$ 。条纹旋转后对一条基线上的两个台站信号做相关，互相关函数的傅里叶变换是互功率谱，因此需要对一条基线上的两个台站数据做傅里叶变换并共轭相乘^[14]。最后对上述数据的处理结果进行累加并输出可视度数据。

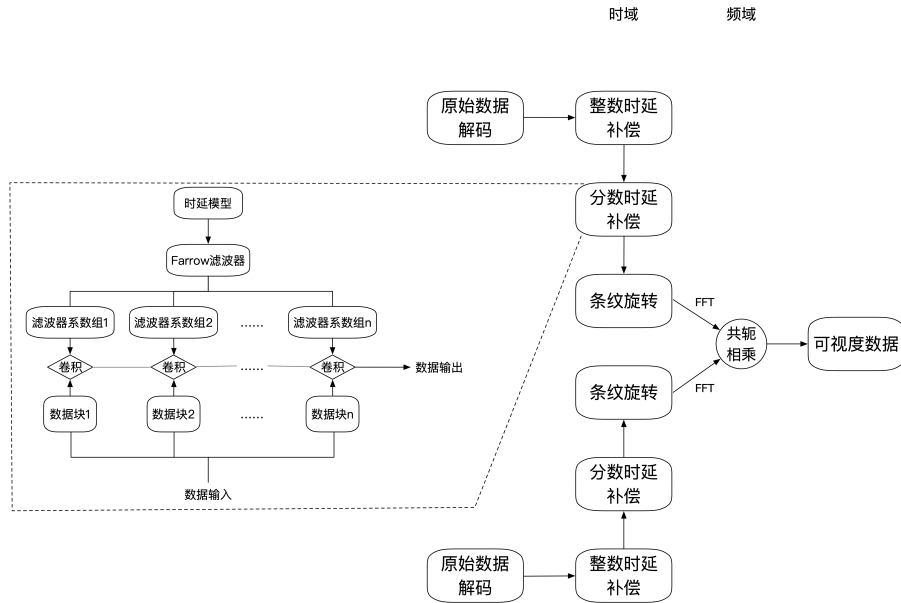


图 6 Farrow 滤波器相关处理流程

4 计算与分析

由于不同处理机实现平台不同，为了便于比较图1、图2和图6相关处理流程的差异，通过 Python 来实现三种相关处理流程，除了分数时延补偿模块不同，其余数据解码、整数时延补偿、条纹旋转等模块完全相同。其中流程 1 是按照图1流程进行相关处理，流程 2 按照图2流程进行相关处理，流程 3 是按照图6流程进行相关处理，**分别对比不同相关处理流程的差异，以及相同处理流程而不同分数时延补偿方式的差异。为了平衡补偿精度和计算效率，分数时延补偿使用 3 次 23 阶 Farrow 滤波器。**在完成软件相关处理机的设计后，相关处理了嫦娥六号 2024 年 6 月 12 号 7 时 30 分 0 秒至 7 时 48 分 55 秒的实测数据，包含 1 个射

电源 Scan 和 108 个探测器 Scan, 相关处理了北京 (Bj)、昆明 (Km)、乌鲁木齐 (Ur) 和天马 (Tm) 四站六条基线的数据, 对三者相关处理结果进行了后处理解算了残余时延。

4.1 相关处理结果

相关结果的可视度数据通过互相关功率谱表示, 图像左纵轴表示幅度谱数据, 右纵轴表示相位谱数据, 范围为 $(-\pi, \pi)$, 流程 1 的射电源和探测器相关处理结果如图 7 所示。流程 2 相关结果如图 8, 流程 3 相关结果如图 9。

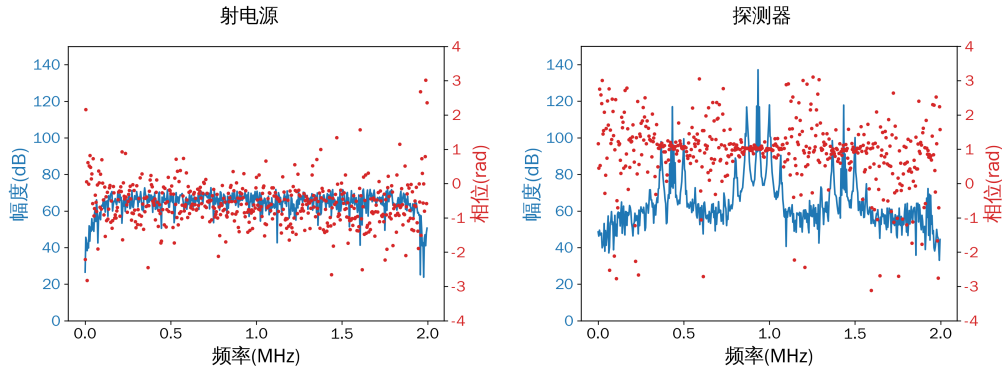


图 7 流程 1 相关处理结果

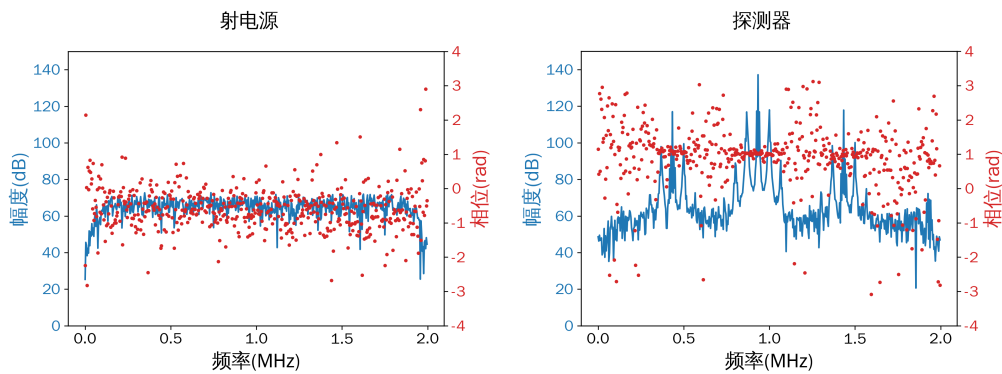


图 8 流程 2 相关处理结果

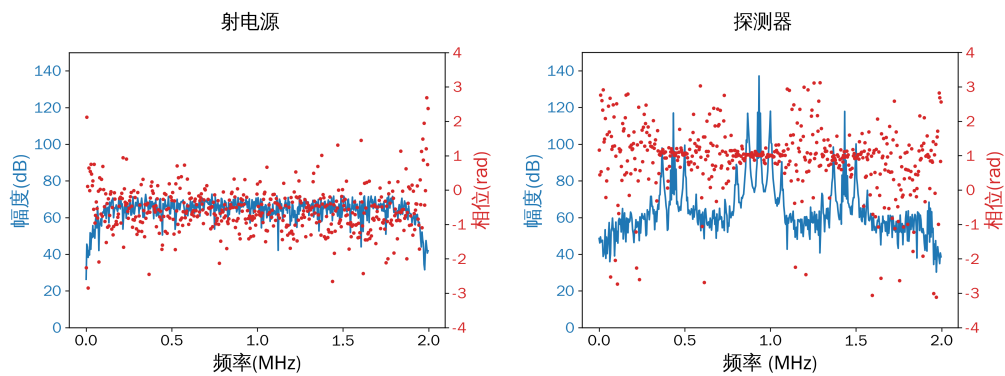


图 9 流程 3 相关处理结果

对比相关结果，三种处理流程的幅度谱和相位谱数值相近。图10是三种相关处理流程的耗时对比，流程 1 由于分数时延在傅里叶变换后两路信号共轭相乘前补偿，只进行一次傅里叶变换，用时最少；流程 2 的耗时主要来源于频域分数时延补偿，做了一次傅里叶变换和一次逆变换；流程 3 在时域通过滤波完成分数时延补偿，相比流程 2 节约了大约 23% 的计算开销，而滤波补偿的方式相比流程 1 在两路数据共轭相乘前补偿更加耗时。

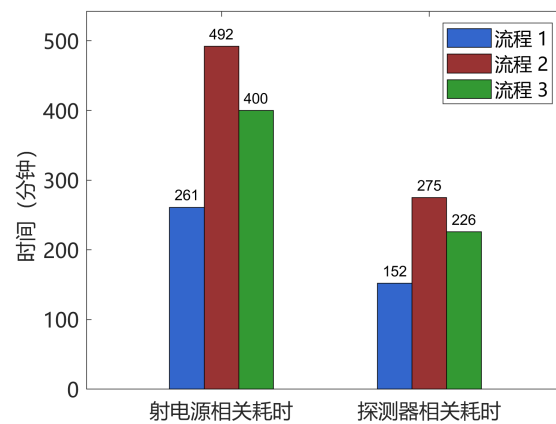


图 10 相关处理耗时对比

4.2 后处理解算残余时延

对上述嫦娥六号探测器相关结果进行后处理，解算了残余时延如图11，**图像横轴表示后处理的 Scan，纵轴表示残余时延**。考虑到地基 VLBI 分数时延变化情况，频域补偿和 Farrow 滤波器补偿效果接近，三者在处理精度上一致。流程 1 和流程 2 采用频域补偿方式的误差主

要来自对时域信号进行截断而引起的拖尾, 而且是不可避免的; 流程 3 的精度主要受滤波器阶数的影响, 阶数越高补偿精度越高^[15], 但相应会消耗更多的计算资源。

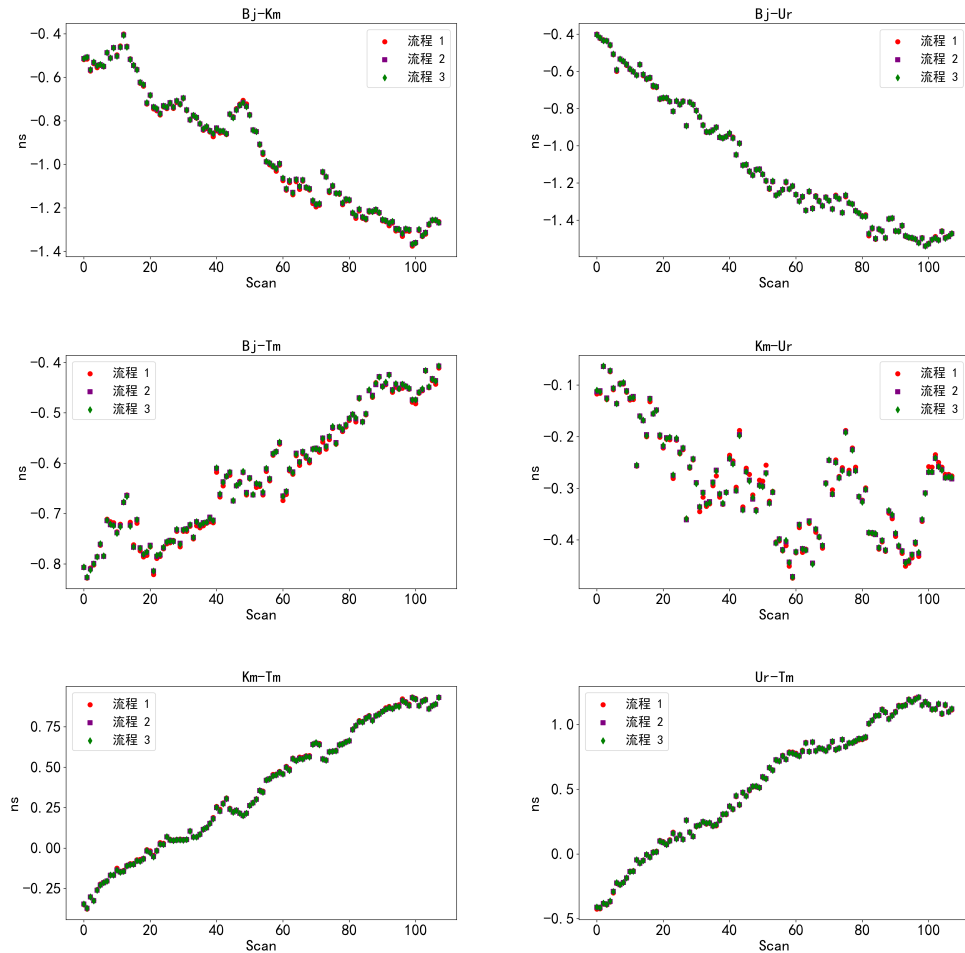


图 11 后处理残余时延对比

图12对比了流程 3 和流程 1、流程 3 和流程 2 在各条基线残余时延的差异。流程 3 和流程 1 整体残余时延差异在 0.015ns 左右, 流程 3 和流程 2 整体时延差异在 0.001ns 左右。流程 3 和流程 1 的差异主要来自于不同的相关处理流程, 流程 3 和流程 2 处理精度较为接近, 主要由于二者相关处理流程一致而分数时延补偿方式不同。

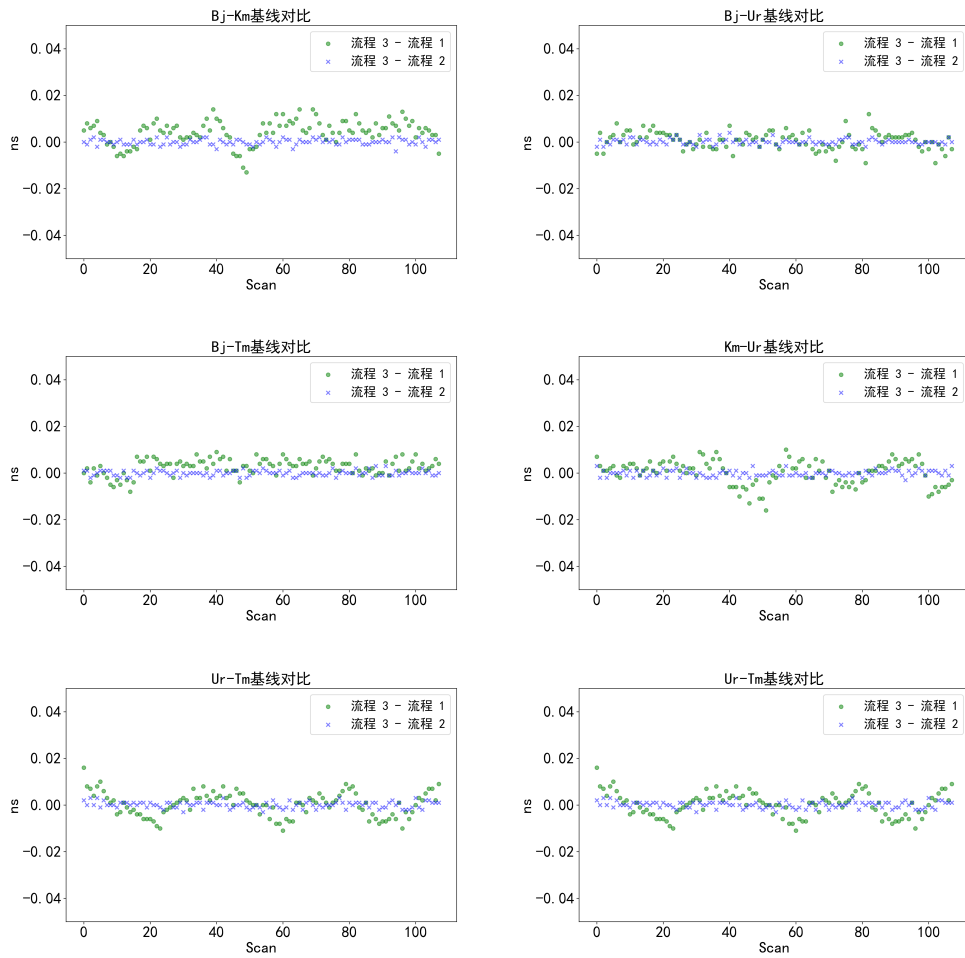


图 12 各基线残余时延差异

5 结论

Farrow 滤波器在处理连续变化的分数时延时，不需要重新计算滤波器系数，具有自适应分数时延变化的优点，通过设计并实现图6相关处理流程，提出了一种基于 Farrow 滤波器的 VLBI 相关处理算法，相比图1相关流程，该算法在条纹旋转前完成了分数时延补偿，在相关处理流程上具备一定优势，在分数时延补偿方面，相比图2频域补偿的方式，Farrow 滤波器可以连续补偿分数时延，同时具备更好的处理效率。在空间 VLBI 数据处理中，分数时延频域补偿受限于傅里叶变换长度的选择，而 Farrow 滤波器能更好的适应空地基线时延的

连续变化, 具有很好的应用前景。

参考文献:

- [1] Michael J, F. J R, Jan W. Software and Techniques for VLBI Data Processing and Analysis [J]. Universe, 2022, 8 (10): 527-527.
- [2] 段学铭, 童力, 郑为民, 等. 基于 GPU 集群的空间 VLBI 射电源条纹搜索研究 [J]. 天文学进展, 2024, 42 (03): 494-505.
- [3] 郑为民. 博士后研究报告, 上海: 中国科学院上海天文台, 2001
- [4] 陈中, 郑为民. VLBI 软件相关处理机现状和发展趋势 [J]. 天文学进展, 2015, 33 (04): 489-505.
- [5] DiFX: A Software Correlator for Very Long Baseline Interferometry Using Multiprocessor Computing Environments [J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2007, 119 (853): 318-336.
- [6] 童力. 博士后研究报告, 上海: 中国科学院上海天文台, 2014: 15
- [7] Keimpema A, Kettenis M M, Pogrebenko S V, et al. The SFXC software correlator for very long baseline interferometry: algorithms and implementation [J]. Experimental Astronomy, 2015, 39: 259-279.
- [8] 刘磊, 郑为民, 张娟, 等. 中国 VLBI 网软件相关处理机测地应用精度分析 [J]. 测绘学报, 2017, 46 (07): 805-814.
- [9] Likhachev F S, Kostenko I V, Girin A I, et al. Software Correlator for Radioastron Mission [J]. Journal of Astronomical Instrumentation, 2017, 6 (3): 17.
- [10] Välimäki, V., Laakso, T.I. (2001). Fractional Delay Filters—Design and Applications. In: Marvasti, F. (eds) Nonuniform Sampling. Information Technology: Transmission, Processing, and Storage. Springer, Boston, MA.
- [11] 吴高奎, 严济鸿, 何子述, 等. 基于 Farrow 结构的分数时延滤波器 [J]. 雷达科学与技术, 2010, 8 (03): 269-272+288.
- [12] 林文涛, 贾玉博, 张紫文, 等. 基于加权最小二乘法的分数时延滤波器设计 [J]. 仪表技术与传感器, 2023, (01): 44-47.
- [13] 王伟. 一种 Farrow 结构数字时延滤波器的设计 [J]. 电讯技术, 2018, 58 (05): 601-606.
- [14] 钱志瀚. 甚长基线干涉测量技术在深空探测中的应用 [C]// 中国宇航学会深空探测技术专业委员会. 中国宇航学会深空探测技术专业委员会第七届学术年会论文集. 中国科学院上海天文台, 2010: 7.
- [15] 江悟, 舒逢春. 小数时延补偿算法的设计及应用 [J]. 天文研究与技术, 2011, 8 (04): 388-394.

Research on a VLBI Correlation Processing Algorithm Based on Farrow Structure Fractional Delay Filter

LU Jian^{1,2}, TONG Li^{1,3,4}, RUI Ping^{1,3,4}, ZHENG Wei-min^{1,3,4}, CHEN Zhong^{1,3,4}

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. Key Laboratory of Radio Astronomy, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China; 4. Shanghai Key Laboratory of Space Navigation and Positioning Techniques, Shanghai 200030, China)

Abstract: Correlation processing is a crucial step in VLBI data processing. The correlation results obtained by compensating for fractional delay before fringe rotation theoretically offer higher precision. However, the mainstream correlation processors currently implement fractional delay compensation in the frequency domain, which incurs significant computational overhead and lacks flexibility in compensation methods. This paper investigates and implements a VLBI correlation processing algorithm based on the Farrow structure fractional filter. This algorithm completes fractional delay compensation before fringe rotation and can dynamically adapt to changes in fractional delay in the time domain, thereby improving computational efficiency. By processing actual data from the Chang'e 6 mission, the effectiveness of this method is validated. Compared to frequency domain compensation, this method reduces computational overhead by 23% while maintaining the same processing accuracy as frequency domain compensation, and provides more continuous fractional delay compensation.

Key words: correlator; fractional delay compensation; Farrow structure fractional delay filter