第 38 卷　第 1 期
2020 年 4 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 38,　No. 1
Apr., 2020

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2020.01.06

双星系统中大质量比致密天体质量四极矩对轨道频率的影响分析

万程凯[1,2]，韩文标[2]，江春华[1]

(1. 南华大学 数理学院，衡阳 421001；　2. 中国科学院 上海天文台，上海 200030)

摘要： 极端质量比旋进系统是空间引力波探测器最重要的波源之一。对引力波的探测需要高精度波形模版。当前主流的极端质量比旋进系统引力波计算模型中，人们一般将小质量天体当作试验粒子进行计算，而忽略了其结构及自身引力对背景引力场的影响。利用 Mathisson-Papapetrou-Dixon 方程研究延展体在弯曲时空中的运动，以及小天体自旋和质量多极矩对引力波信号识别产生的影响。结果表明，质量比在 $10^{-6} \sim 10^{-4}$ 范围的旋进系统，其自旋达到很大时，自旋对延展体的轨道运动有不可忽略的影响；在质量比 $10^{-4} \sim 10^{-2}$ 区间内，需要考虑中心黑洞潮汐作用导致的白矮星形变；在质量比大于 10^{-4}，且白矮星自旋很大时，其自旋产生的形变会对小天体轨道运动产生不可忽略的影响。大质量黑洞潮汐作用导致的恒星级黑洞或中子星产生的形变可以忽略，中子星和黑洞的自旋会对轨道运动产生不可忽略的影响，而自旋产生的四极矩对轨道运动不产生影响。

关　键　词： 极端质量比旋进；Mathisson-Papapetrou-Dixon 方程；致密天体；低频引力波

中图分类号： P145.2　　　　**文献标识码：** A

1 引　言

当致密天体在运动过程中恰巧接近极端大质量黑洞时，它有可能被黑洞引力场俘获，致使其在新的轨道上围绕黑洞运动。理论上天体在围绕黑洞运动时会释放出引力波，从而使系统能量逐渐损失，导致小质量天体的运动轨道由于引力辐射的耗散效应以相当缓慢的速率逐渐收缩，最终使小质量天体坠入到中心黑洞中，并与其并合成一个新的黑洞。绕中心黑洞运动的小质量致密天体可能是中子星、黑洞或白矮星。 假设小质量致密天体的质量用 m 表示，大质量黑洞的质量用 M 表示，我们称质量比 $\nu = \dfrac{m}{M}$ 的值在 $10^{-6} \sim 10^{-4}$ 范围的

收稿日期： 2019-04-25；　**修回日期：** 2019-06-17

资助项目： 国家自然科学基金 (11773059)

通讯作者： 韩文标，wbhan@shao.ac.cn

系统为极端质量比旋进系统 (extreme mass ratio inspiral, EMRI)，ν 为 $10^{-4} \sim 10^{-2}$ 的系统为中等质量比旋进系统 (intermediate mass ratio inspiral, IMRI)。致密双星产生的引力波事件已经被美国激光干涉引力波观测台 (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory, LIGO) 和法国-意大利 VIRGO 探测器[1−3]探测到。LIGO 的敏感频段为 $10 \sim 1\,000$ Hz，而空间引力波探测器 (如 LISA[4]、天琴[5]、太极[6]) 的敏感频段为 $10^{-4} \sim 10^{-1}$ Hz。

在牛顿理论中，关于双星的引力问题，其运动方程有严格解，两个质点形成的引力孤立系统允许两个守恒积分 (能量和角动量守恒)。而在广义相对论中，双星运动的轨道明显不具有严格周期性：极端质量比双星系统的轨道运动辐射引力波，导致致密天体的轨道半径减小，且频率增加，从而使致密天体旋进运动。在旋进后期，引力波在探测器的敏感频段被探测到。在双星距离较大时，双星之间的潮汐相互作用可以忽略不计，并且可将小天体看作质点。然而，随着双星间距离减小，轨道频率会增加，潮汐相互作用会变大，这会导致致密天体发生潮汐形变，并使它们的引力场和轨道运动受到影响。这种潮汐效应在引力波的形状和相位上得以体现。由于引力波的形状和相位中隐藏着轨道运动的详细信息，所以我们能够根据轨道运动特征分辨出引力波。

致密天体的结构对 EMRI 发射的引力波瞬时振幅的影响可以忽略不计，但是它对频率造成的微小影响会随时间的增长而累积成不可忽略的相位偏差。来自致密天体的四极矩和轨道进动稍微加速了并合进程，并导致真实信号与质点粒子信号之间的相位差呈现单调增长的趋势[7]。因此，在大质量比双星系统中，不能总是简单地用试验粒子运动模型计算其运动状态。

EMRI 是空间引力波探测器最重要的引力波源之一。由于我们对EMRI的天体物理起源还没有完全了解，所以初步预计，在 LISA 探测期间，引力波事件的年发生率在几次至几千次之间。这个范围也进一步说明，人们可以从 EMRI 的探测结果中了解到更多信息[8]。

Mathisson[9]研究了 EMRI 和 IMRI 系统中带有多极矩的小天体在给定时空中的运动。Corinaldesi 和 Papapetrou[10]把带有自旋的小质量致密天体作为试验粒子，认为它的质量很小，其对度规的影响可以忽略不计。但是在 Papapetrou 方程中，他们仅考虑了粒子的质量和自旋，即所谓的单极-偶极近似，忽略了质量四极矩效应。Suzuki 和 Maeda[11]在 Papapetrou 方程的基础上研究了自旋试验粒子绕施瓦西黑洞运动的混沌行为，发现当粒子自旋大于某个临界值时，系统会出现混沌，且该混沌完全由自旋-轨道耦合引起。在此之后，很多人研究了自旋粒子绕克尔黑洞和施瓦西黑洞运动的动力学模型，发现了带有很大自旋的粒子绕大质量黑洞运动的轨道特性和混沌性[12−17]。Wu 等人[18−21]研究了其中一个天体有自旋时的相当质量比双星系统的后牛顿保守拉格朗日形式的混沌性和后牛顿保守哈密顿形式的混沌性，并证实了这两种形式都不能在谐和坐标系中混沌。他们还分析了同阶后牛顿拉格朗日方法与后牛顿哈密顿方法在强引力场下的差别。

Dixon[22−24]分别在 1970 年、1973 年和 1974 年将 Papapetrou 方程展开到多极，并赋予其物理含义，使多极矩的概念更加清晰。由于四极是多极的主要部分，因此，一些研究者把 Mathisson-Papapetrou-Dixon (MPD) 方程扩展到四阶来研究延展体的轨道动力学，并基于 MPD 方程研究克尔黑洞潮汐作用诱导的延展体四极矩和小质量天体自旋产生的四极矩，从

而来定性分析致密双星系统辐射的引力波[25–28]， 其中，Han 和 Cheng[29]通过定量分析研究了延展体自旋产生的四极矩对 EMRI 系统的引力波波形的影响。

本文将利用 MPD 方程，在 Han 和 Cheng 研究结果的基础上，定量分析更一般形式的四极矩。我们的研究内容既包括致密天体本身的自旋引起的四极矩，也包含大质量黑洞潮汐作用引起的致密天体四极矩，及其对致密天体轨道运动和引力波频率的影响。

本文内容安排如下：第 2 章介绍延展体 MPD 方程，以及不同种类致密天体的自旋和质量四极矩；第 3 章计算自旋和四极矩对引力波频率的影响；最后，我们将对本文研究的结果进行总结和讨论，并对其应用前景进行展望。

2 延展体动力学方程

引力波的探测依赖于理论模板的精度，因此，我们需要知道小天体的精确运动。MPD 运动方程描述了在弯曲时空中具有自旋和质量多极矩的延展体运动。MPD 方程多极展开中的高阶项表明，小天体内部结构对运动轨道产生的影响较小。本文采用的致密天体自旋和四极矩的 EMRI 和 IMRI 模型，比目前流行的试验粒子近似模型更符合天体的实际运动，计算出的轨道也更加精确。

除非致密天体绕快速旋转的大质量克尔黑洞运动，否则直到双星并合的旋进阶段，延展体的自旋导致的四极矩效应都很小，因此，很多人忽略了潮汐效应对延展体的影响[30]，也忽略了致密天体自旋产生的四极矩效应。但是在致密天体与中心黑洞的并合阶段，或延展体接近最内稳定圆轨道时，潮汐效应变得不可忽略，此时必须考虑潮汐效应对轨道进动产生的影响。我们研究的致密双星系统就是小质量延展体围绕快速旋转的克尔黑洞运动的情况。

延展体的动力学方程如下[22]：

$$\dot{p}^{\mu} = -\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}v^{\rho}R^{\mu}{}_{\rho\alpha\beta} - F^{\mu} \quad , \tag{1}$$

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = 2p^{[\alpha}v^{\beta]} + G^{\alpha\beta} \quad . \tag{2}$$

为书写简便，本文采用爱因斯坦求和约定，即每个上指标和每个下指标均取 0, 1, 2, 3。在某一项中，如果其上指标与下指标相同，就表示对该指标从 0~3 求和。上式中，p^{μ} 表示小质量致密天体四动量，定义为 $p^{\mu} = mu^{\mu}$，其中 m 为延展体的动力学质量，满足条件 $m^2 = -p^{\mu}p_{\mu}$，它是小质量致密天体四动量的标量积。由于自旋和四极矩与背景引力场之间相互耦合，因此，m 并不是一个常数。u^{μ} 表示物体动力学速度，定义式是 $u^{\mu}u_{\mu} = -1$。$\dot{p}^{\mu}$ 和 $\dot{S}^{\alpha\beta}$ 分别代表四动量和自旋张量对原时 τ 求微分。以上相关定义与 Ehlers 和 Rudolph[31]保持一致。$S^{\alpha\beta}$ 是二阶反对称自旋张量，满足自旋守恒条件 $S^2 = S^{\mu}S_{\mu} = \frac{1}{2}S^{\mu\xi}S_{\mu\xi}$。$v^{\rho} = \mathrm{d}z^{\rho}/\mathrm{d}\tau$ 表示延展体运动学四速度，其中，$\rho = 0$ 时，z^{ρ} 表示时间坐标 t；$\rho = 1, 2, 3$ 时，z^{ρ} 表示空间坐标 x, y, z。$z(\tau)$ 是延展体的质心世界线，该质心通过自旋补充条件 $u_{\lambda}S^{\kappa\lambda} = 0$ 来确定。$R^{\mu}_{\rho\alpha\beta}$ 是黎曼曲率张量，F^{μ} 和 $G^{\alpha\beta}$ 是四极矩和背景引

力场的耦合项，可表示为：

$$F^{\mu}=\frac{1}{6}J^{\alpha\beta\gamma\sigma}\nabla^{\mu}R_{\alpha\beta\gamma\sigma}\quad , \tag{3}$$

$$G^{\alpha\beta}=\frac{4}{3}J^{\gamma\delta\epsilon[\alpha}R^{\beta]}_{\delta\epsilon\gamma}\quad , \tag{4}$$

其中，$J^{\gamma\delta\epsilon\sigma}$ 是质量四极矩张量，它与 $R_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ 具有相同的对称性。文中所有指标都用度规张量进行升降。

延展体的四速度与四动量之间的关系式如下[29]：

$$m^{2}v^{\sigma}=mp^{\sigma}-F^{\sigma\rho}p_{\rho}+\frac{2mp^{\rho}R_{\mu\rho\alpha\beta}S^{\sigma\mu}S^{\alpha\beta}-2p_{\delta}F^{\rho\delta}R_{\mu\rho\alpha\beta}S^{\sigma\mu}S^{\alpha\beta}+4m^{2}F_{\mu}S^{\sigma\mu}}{4m^{2}+R_{\mu\rho\alpha\beta}S^{\sigma\mu}S^{\alpha\beta}}\quad . \tag{5}$$

选择 $v^{\mu}v_{\mu}=-1$ 时，τ 即为原时。运动学质量 $\overline{m}=p^{\mu}v_{\mu}$，一般情况下动力学质量与物体运动学质量并不相等，但是本文采用正交条件 $u^{\mu}v_{\mu}=-1$，所以 $m=\overline{m}$。

现在我们来讨论质量四极矩张量$J^{\alpha\beta\gamma\delta}$[26]：

$$J^{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{3m}{\overline{m}^{3}}p^{[\alpha}Q^{\beta][\gamma}p^{\delta]}\quad , \tag{6}$$

$$Q^{\alpha\beta}=C_{Q}S^{\alpha}_{\lambda}S^{\beta\lambda}+\frac{1}{\overline{m}^{2}}\hbar_{2}R^{\alpha\beta\gamma\delta}u_{\gamma}u_{\delta}\quad , \tag{7}$$

其中，Q 是延展体四极矩 (与坐标系的选取无关)。C_Q 是衡量自旋产生的四极矩大小的无量纲参数，其数值代表了自旋产生的四极矩的大小，与延展体状态方程有关。已知旋转的致密天体的半径和质量，其 C_Q 可以由下式近似表达[32]：

$$C_{Q}\approx-\frac{25}{8}\frac{Rc^{2}}{Gm}\quad , \tag{8}$$

其中，G 是万有引力常数，c 为光速，R 为天体半径。在不同密度和不同模型下，计算出的 C_Q 值不同。对于中子星 (质量为 $1.4M_{\odot}$，半径为 12 km)，C_Q 取值范围一般是 $2\sim8$，本文取值为 4；对于黑洞来说，$C_Q=1$；对于一般白矮星，$C_Q\approx10^{4}$[33]。

由于潮汐相互作用取决于延展体的内部结构，因此，通过测量中心黑洞潮汐作用产生的四极矩，可以获得关于延展体的致密性及其状态方程的重要信息。表征潮汐产生的四极矩大小的参数 $\hbar_2$ 为[26]：

$$\hbar_{2}=\frac{2k_{2}}{3}\left(R/\frac{Gm}{c^{2}}\right)^{5}\nu^{4}\quad , \tag{9}$$

其中，$\hbar_2$ 的量纲是 mM^4；k_2 是无量纲的潮汐勒夫数，由致密天体的状态方程决定。Binnington 和 Poisson[34]提出了一个适用于具有强内部引力的致密天体的相对论潮汐参数：对于黑洞来说，$k_2=0$；对于中子星，$k_2\approx0.1$；对于白矮星，$k_2\approx0.01$[26, 35]。根据式 (8) 和式 (9) 可计算出一些白矮星参数，如表 1 所示。

表 1 不同质量白矮星的潮汐和自旋产生的四极矩

白矮星质量/$M_\odot$	白矮星半径$R/R_\odot$	$\hbar_2 \cdot \nu^{-4}$	C_Q
0.75	0.009	3.57×10^{16}	17 407.5
1.003	0.008 4	5.92×10^{15}	12 148.80
1.1	0.003 1	2.55×10^{13}	4 088.12
1.2	0.005 5	2.90×10^{14}	6 648.69
1.28	0.004 1	4.84×10^{13}	4 646.53
1.3	0.004	3.96×10^{13}	4 463.46
1.33	0.003	8.39×10^{12}	3 272.08

注：$M_\odot$ 为太阳质量，$R_\odot$ 为太阳半径。

3 自旋和四极矩对引力波的影响

自旋对轨道演化的主要影响是，它会导致轨道平面进动，从而改变轨道在空间中的方向。本文采用符号 S 表示自旋参数，它是 mM 的倍数，而不是 m^2 的倍数。Corinaldesi 和 Papapetrou[10] 指出，在忽略潮汐耦合的情况下，致密天体 (白矮星、中子星和黑洞) 的自旋参数 S 远小于 1。

对于绕大质量黑洞 (其质量为 M，远大于小质量致密天体质量 m) 运动的小黑洞 (即小质量致密天体)，其自旋参数 $S = s/(mM) \leqslant \dfrac{m^2}{mM} = m/M \ll 1$[13]，其中 s 为自旋角动量。一个质量为 m 的恒星级黑洞，其最大的自旋角动量 $s = m^2$。很多白矮星和中子星的自旋角动量都能达到该自旋角动量，比如，对于毫秒脉冲星，其自旋角动量 $s \approx m^2$。不同质量白矮星的最大自旋参数如表 2 所示。本文中我们采用的中子星最大自旋值与黑洞的相同，原初黑洞的自旋值几乎都是 0[36]。

表 2 不同质量致密天体的自旋角动量和潮汐半径

致密天体质量/$M_\odot$	白矮星半径$R/R_\odot$	白矮星$S_{\max}/\nu$	白矮星 $R_{\rm tidle}/\nu^{-2/3}$	中子星 $R_{\rm tidle}/\nu^{-2/3}$
0.75	0.009	9.05	14 079.85	6 853.92
1.003	0.008 4	10.74	4 898.09	1 235.86
1.1	0.003 1	11.07	1 648.22	906.21
1.2	0.005 5	11.4	2 680.58	679.31
1.28	0.004 1	11.65	1 873.36	548.31
1.3	0.004	11.71	1 799.55	520.62
1.33	0.003	11.8	1 319.22	482.61

注：$R_{\rm tidle}$ 表示潮汐半径，其数值是 M 的倍数。

当小质量天体与大质量克尔黑洞之间的距离小于 $R_{\rm tidle}$ 时，小质量致密天体将会被中心黑洞产生的巨大潮汐力撕裂。$R_{\rm ISCO}$ 是最内稳定圆轨道 (innermost stable circular orbit, ISCO)的半径。当小天体绕大质量黑洞运行的距离小于 $R_{\rm tidle}$ 时，不再存在稳定的圆轨道。对于极端质量比双星系统，相应的自旋和多极矩参数也都较小。根据 Bini 等人[27] 的研究结

果，自旋和四极矩对 ISCO 的影响很小，因此，我们采用试验粒子的 ISCO 作为小质量天体轨道运动是否稳定的判据。

ISCO 半径和潮汐半径的计算公式[37] 如下：

$$R_{\rm ISCO} = 3 + Z_2 \pm \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \quad , \tag{10}$$

其中，Z_1 和 Z_2 的表达式[38] 如下：

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2)^{1/3}[(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3}] \quad , \tag{11}$$

$$Z_2 = \sqrt{3a^2 + Z_1^2} \quad , \tag{12}$$

$$R_{\rm tidle} = 2^{1/3} \frac{R}{Gm/c^2} \nu^{2/3} \quad , \tag{13}$$

其中，a 为克尔黑洞参数，其值是 M 的倍数。式 (10) 中，$a < 0$ 时，等式取加号；$a > 0$ 时，等式取减号。取 $a = 0.9$，由式 (10) 可计算得出，$R_{\rm ISCO} = 2.32$。在进行数值计算的过程中，我们选取潮汐半径和最内稳定圆轨道半径的最大值作为小天体的轨道半径。

表 3 是选取质量为 $1.3M_\odot$ 的白矮星、中子星和原初黑洞的相关物理参数[36−39]，并经过以上方程计算得出的近似结果。

表 3　$m = 1.3M_\odot, \nu = 10^{-6}, a = 0.9, r = 6M$ 情况下自旋和四极矩对引力波产生的影响

致密天体	$S/10^{-6}$	$\hbar_2$	C_Q	Ω/M^{-1}	$f_{\rm GW}$/Hz	$\frac{\Delta f}{f}$
白矮星1	3.84	3.96×10^{-11}	4 463.46	0.064 115 274 508 484 4	0.003 187 268	1.47×10^{-6}
白矮星2	1	3.96×10^{-11}	4 463.46	0.064 115 180 164 044 9	0.003 187 264	3.43×10^{-11}
白矮星3	0	3.96×10^{-11}	4 463.46	0.064 115 146 951 511 0	0.003 187 262	5.18×10^{-7}
中子星1	0	520.6×10^{-24}	4	0.064 115 146 951 343 9	0.003 187 262	5.18×10^{-7}
中子星2	1	520.6×10^{-24}	4	0.064 115 180 166 244 9	0.003 187 264	2.49×10^{-14}
黑洞	1	0	1	0.064 115 180 166 246 5	0.003 187 264	—

注：r 是小质量天体沿圆轨道运动的半径，Ω 表示轨道频率，$f_{\rm GW}$ 是引力波频率。

引力波频率与轨道频率之间的关系式如下：

$$f_{\rm GW} \approx 6.462\,498\,881 \times 10^4 \times \frac{M_\odot}{M} \times \Omega \quad . \tag{14}$$

表 3 中，$\frac{\Delta f}{f} = \frac{|f_{\rm WD/NS} - f_{\rm BH}|}{f_{\rm WD/NS}}$，表示延展体是白矮星或中子星时，其绕中心大质量黑洞轨道运动产生的引力波频率，与延展体是黑洞的情况下所产生的引力波频率的相对偏差，其中，$f_{\rm WD/NS}$ 表示致密天体为白矮星或中子星时系统产生的引力波频率，$f_{\rm BH}$ 表示当小质量致密星是黑洞时，其与中心黑洞并合时产生的引力波频率。当 $\frac{\Delta f}{f}$ 值的量级与极端质量比 ν 的量级相同或相差不大时，两种不同密度的致密天体可以被区分[40]。

由表 3 和表 4 可以看出，当致密星质量为 $1.3M_{\odot}$，双星质量比为 10^{-6}，距离为 $6M$，且白矮星或中子星的自旋量与黑洞的相等时，它们与黑洞的引力波频率的相对偏差量级很小，此时，质量四极矩对白矮星或中子星的轨道运动的影响可以忽略，因此，我们无法通过引力波研究致密星的物态方程。无论是中子星，还是白矮星，其自旋会对引力波频率产生影响。如果通过引力波反演得到的自旋角动量系数明显大于 1，那么，我们可以认定该致密星是白矮星。当双星质量比 $\nu = 10^{-5}$ 时，结论与 $\nu = 10^{-6}$ 时一样。

表 4　$m = 1.3M_{\odot}, \nu = 10^{-6}, a = 0.9, r = 6M$ 情况下自旋和四极矩对引力波产生的影响

致密天体	$S/10^{-6}$	$\hbar_2$	C_Q	Ω/M^{-1}	$f_{\rm GW}$/Hz	$\frac{\Delta f}{f}$
白矮星1	3.84	3.96×10^{-11}	4 463.46	0.064 115 274 508 484 4	0.003 187 268	1.98×10^{-6}
白矮星2	1	3.96×10^{-11}	4 463.46	0.064 115 180 164 044 9	0.003 187 264	5.18×10^{-7}
白矮星3	0	3.96×10^{-11}	4 463.46	0.064 115 146 951 511 0	0.003 187 262	2.60×10^{-12}
中子星1	0	520.6×10^{-24}	4	0.064 115 146 951 343 9	0.003 187 262	0
中子星2	1	520.6×10^{-24}	4	0.064 115 180 166 244 9	0.003 187 264	5.18×10^{-7}
黑洞	0	0	1	0.064 115 146 951 343 9	0.003 187 262	—

表 5 和表 6 表示，在 $\nu = 10^{-4}$ 的双星系统中，通过比较白矮星 3* 与白矮星 4* 可以看出，白矮星自旋引起的四极矩对轨道运动的影响可忽略。因此，从白矮星 1 与白矮星 2* 进行对比以及白矮星 2 与黑洞进行对比的两组引力波频率的相对偏差可以看出，当白矮星的自旋与黑洞的自旋相等时，中心黑洞潮汐作用产生的白矮星四极矩会对白矮星的轨道运动产生影响。中子星的自旋与原初黑洞自旋相等时，两者辐射的引力波频率十分接近；中子星的自旋与黑洞自旋相差较大时，两者产生的频率相对偏差和双星质量比均相差不大，因此，自旋会影响中子星的轨道运动。

表 5　$m = 1.3M_{\odot}, \nu = 10^{-4}, a = 0.9, r = 3.9M$ 情况下自旋和四极矩对引力波产生的影响

致密天体	$S/10^{-6}$	$\hbar_2$	C_Q	Ω/M^{-1}	$f_{\rm GW}$/Hz	$\frac{\Delta f}{f}$
白矮星1	3.84	3.96×10^{-3}	4 463.46	0.116 341 000 433 866	0.578 348 911 6	7.02×10^{-4}
白矮星2	1	3.96×10^{-3}	4 463.46	0.116 326 710 767 344	0.578 277 875 5	5.79×10^{-5}
白矮星3	0	3.96×10^{-3}	4 463.46	0.116 321 188 321 191	0.578 250 422 5	5.32×10^{-5}
中子星1	0	520.6×10^{-16}	4	0.116 253 617 189 442	0.577 914 516 1	4.84×10^{-5}
中子星2	1	520.6×10^{-16}	4	0.116 259 250 670 403	0.577 942 521 0	7.39×10^{-10}
黑洞	1	0	1	0.116 259 250 756 366	0.577 942 521 4	—

表 6　$m = 1.3M_{\odot}, \nu = 10^{-4}, a = 0.9, r = 3.9M$ 情况下自旋和四极矩对引力波产生的影响

致密天体	$S/10^{-6}$	$\hbar_2$	C_Q	Ω/M^{-1}	$f_{\rm GW}$/Hz	$\frac{\Delta f}{f}$
白矮星1	0	3.96×10^{-3}	4 463.46	0.116 321 188 321 191	0.578 250 422 582	5.80×10^{-4}
白矮星2*	0	0	4 463.46	0.116 253 617 189 442	0.577 914 516 148	—
白矮星3*	1	0	4 463.46	0.116 259 122 888 187	0.577 941 885 819	1.09×10^{-6}
白矮星4*	1	0	1	0.116 259 250 756 366	0.577 942 521 471	—

注：符号 * 表示取非物理的 $\hbar_2$ 和 C_Q 参数值的白矮星，以便数据对比。

表 7 表明，在双星质量比为 10^{-2}，小天体距中心黑洞 $6M$ 处，中子星 2 与黑洞 1 相比，以及中子星 1 与黑洞 2 相比，其辐射的引力波频率相对偏差可以区分，因此，可以认为自旋会影响中子星的轨道运动。中子星 2 与黑洞 2 的自旋相同，但是潮汐参数和自旋参数不同，产生的引力波频率相对偏差的量级与 ν 相比很小，说明质量四极矩对中子星产生的影响很小，可以忽略。中子星 1 与黑洞 1 相比，中心黑洞潮汐作用导致的中子星形变对其轨道运动产生的影响可以忽略，因此，中子星自旋产生的四极矩对延展体轨道运动产生的影响也可以忽略。

表 7　$m=1.3M_\odot, \nu=10^{-2}, a=0.9, r=6M$ 情况下自旋和潮汐效应对引力波产生的影响

致密天体	$S/10^{-2}$	$\hbar_2$	C_Q	Ω/M^{-1}	$f_{\rm GW}/{\rm Hz}$	$\frac{\Delta f}{f}$
中子星1	0	520.6×10^{-8}	4	0.064 115 149 148 511 4	31.872 621 51	$3.426\,91\times10^{-8}$
中子星2	1	520.6×10^{-8}	4	0.064 447 266 481 384 8	32.037 722 12	$5.153\,353\times10^{-3}$
黑洞1	0	0	1	0.064 115 146 951 343 9	31.872 620 42	—
中子星1	0	520.6×10^{-8}	4	0.064 115 149 148 511 4	31.872 621 51	$5.182\,485\times10^{-3}$
中子星2	1	520.6×10^{-8}	4	0.064 447 266 481 384 8	32.037 722 12	$2.458\,56\times10^{-6}$
黑洞2	1	0	1	0.064 447 424 928 794 8	32.037 800 88	—

4　总结与展望

本文利用 MPD 方程对大质量比旋进系统进行分析，通过数值计算得到了致密星沿圆轨道绕中心黑洞旋进运动的轨道频率，并根据该轨道频率与引力波频率之间的关系获得了双星系统辐射的引力波频率。这些引力波可以通过空间激光引力波探测器 LISA 进行观测，有的引力波频率甚至在 LIGO 的敏感探测频段内。通过改变频率的方法，我们分析了潮汐效应和小天体自旋对引力波频率产生的影响。由于致密天体的致密程度不同，所以白矮星、中子星或黑洞的因潮汐作用和自旋导致的形变对轨道的影响也不同。

对于一个质量约为 $1M_\odot$ 的致密天体，当小天体距离中心黑洞非常近时，我们得到以下研究结果：(1) 本文研究的所有质量比的情况下，自旋对白矮星和中子星的轨道运动产生的影响都不可忽略；(2) 在 $10^{-6}\sim10^{-2}$ 质量比区间，自旋产生的四极矩对中子星产生的影响很小，可以忽略；(3) 质量比为 10^{-4} 时，极端自旋状态下的白矮星自旋产生的四极矩不可忽略；(4) 由于中子星的密度大，潮汐作用产生的四极矩对中子星的影响很小，可以忽略，因此，我们无法通过引力波探测器反演中子星和黑洞的物态方程；(5) 在极端质量比的情况下，小质量天体几乎可以看作质点，因此，潮汐作用产生的四极矩对白矮星的影响很小，可以忽略；(6) 在 $10^{-4}\sim10^{-2}$ 的质量比范围内，潮汐作用产生的四极矩对白矮星轨道运动的影响不可忽略。

从这些结果可以看出，中子星和白矮星的质量四极矩对其轨道运动产生的影响不同。当大质量克尔黑洞的质量约为几百个太阳质量时，产生的引力波频率较高，可以由 LIGO 探测到，但是无法从中反演出中子星物态方程的状态参数。本文中，我们讨论了沿圆轨道运动

的大质量双星系统。关于带有偏心率和轨道倾角的情况，以及通过引力波信号反演得到的自旋和四极矩参数，我们将在后续工作中进行详细介绍。

参考文献：

[1] Abbott B P, Abbott R, Abbott T, et al. Phys Rev Lett, 2016, 116(6): 061102
[2] Abbott B P, Abbott R, Abbott T, et al. Phys Rev Lett, 2017, 119(16): 161101
[3] Abbott B, Jawahar S, Lockerbie N, et al. Phys Rev D, 2016, 93: 122003
[4] https://www.lisamission.org, 2019
[5] Luo J, Chen L S, Duan H Z, et al. Classical and Quantum Gravity, 2016, 33(3): 035010
[6] Gong X, Xu S, Bai S, et al. Classical and Quantum Gravity, 2011, 28(9): 094012
[7] Kochanek C S. ApJ, 1992, 398: 234
[8] Berry C P, Hughes S A, Sopuerta C F, et al. arXiv preprint arXiv:1903.03686, 2019
[9] Mathisson M. Acta Phys Polon, 1937, 6: 163
[10] Corinaldesi E, Papapetrou A. Mathematical and Physical Sciences, 1951, 209(1097): 259
[11] Suzuki S, Maeda K I. Phys Rev D, 1997, 55(8): 4848
[12] SemerÁK O. MNRAS, 1999, 308(3): 863
[13] Hartl M D. Phys Rev D, 2003, 67(2): 024005
[14] Hartl M D. Phys Rev D, 2003, 67(10): 104023
[15] Bini D, de Felice F, Geralico A. Classical and Quantum Gravity, 2004, 21(23): 5441
[16] Kyrian K, SemerÁK O. MNRAS, 2007, 382(4): 1922
[17] Han W. General Relativity and Gravitation, 2008, 40(9): 1831
[18] Wu X, Xie Y. Phys Rev D, 2010, 81(8): 084045
[19] Wu X, Mei L, Huang G, et al. Phys Rev D, 2015, 91(2): 024042
[20] Wu X, Huang G. MNRAS, 2015, 452(3): 3167
[21] Huang L, Wu X, Ma D. The European Physical Journal C, 2016, 76(9): 488
[22] Dixon W G. Proceedings of the Royal Society of London, 1970, 314(1519): 499
[23] Dixon W G. General Relativity and Gravitation, 1973, 4(3): 199
[24] Dixon W G. Mathematical and Physical Sciences, 1974, 277(1264): 59
[25] Bini D, Geralico A. Phys Rev D, 2013, 87(2): 024028
[26] Steinhoff J, Puetzfeld D. Phys Rev D, 2012, 86(4): 044033
[27] Bini D, Faye G, Geralico A. Phys Rev D, 2015, 92(10): 104003
[28] Vines J, Kunst D, Steinhoff J, et al. Phys Rev D, 2016, 93(10): 103008
[29] Han W B, Cheng R. General Relativity and Gravitation, 2017, 49(3): 48
[30] Lincoln C W, Will C M. Phys Rev D, 1990, 42(4): 1123
[31] Ehlers J, Rudolph E. General Relativity and Gravitation, 1977, 8(3): 197
[32] Laarakkers W G, Poisson E. ApJ, 1999, 512(1): 282
[33] Boshkayev K, Rueda J A, Ruffini R, et al. ApJ, 2012, 762(2): 117
[34] Binnington T, Poisson E. Phys Rev D, 2009, 80(8): 084018
[35] Damour T, Nagar A. Phys Rev D, 2009, 80(8): 084035
[36] Sasaki M, Suyama T, Tanaka T, et al. Phys Rev Lett, 2016, 117(6): 061101
[37] Bardeen J M, Press W H, Teukolsky S A. ApJ, 1972, 178: 347
[38] Han W B, Fan X L. ApJ, 2018, 856(1): 82
[39] Provencal J L, Shipman H, Høg E, et al. ApJ, 1998, 494(2): 759
[40] Han W B. Phys Rev D, 2010, 82(8): 084013

Analysis of the Influence of the Mass Quadrupole Moment of Compact Objects on the Orbital Frequency in the Mass-to-mass Ratio Binary System

WAN Cheng-kai[1,2], HAN Wen-biao[2], JIANG Chun-hua[1]

(1.University of South China, Hengyang 421001, China; 2. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China)

Abstract: The extreme mass ratio inspiral system is one of the most important wave sources for space gravitational wave detectors. In gravitational wave detection, a high precision gravity waveform template is required. Many gravitational wave calculation models use test particles as small-mass objects at present,while ignoring the influence of objects structure and its own gravity on the background gravitational field in extreme mass ratio inspiral for gravitational wave detectors. We investigate the motion of the extended body in curved spacetime using the Mathisson-Papapetrou-Dixon equation, and the effects of stellar mass object spin and mass multipole moment on gravitational wave signal recognition. The results show that there is a non-negligible influence on the orbital motion of the extended body when the spin reaches a large value in the range of $10^{-6} \sim 10^{-4}$. At a mass ratio range of about $10^{-4} \sim 10^{-2}$, the influences of deformation induced by tidal of the center massive black holes on the white dwarfs needs to be considered. At a mass ratio range of about 10^{-4} or more, when the physical spin reaches a large value, the induced-spin quadrupole moment of the white dwarfs will have an effect on the orbital motion of the objects. The influence of tidle effect which induced by the massive black holes on the mass deformation of a black holes or a neutron stars is negligible. Neutron stars and black hole spins have a non-negligible effect on orbital motion, but the quadrupole moment induced by spin of the neutron stars or black holes does not affect the orbital motion.

Key words: extreme mass ratio inspiral; Mathisson-Papapetrou-Dixon equation; compact object; low frequency gravitational wave