

文章编号: 1000-8349(2009)01-0080-09



用 Galerkin 方法研究地球本征模

张 冕^{1,2}, 黄乘利¹

(1. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030; 2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

摘要: 地球本征模在地球内部物理结构和动力学机制研究中一直是一个重要的课题, 与地球物理学、地震学联系紧密。过去采用的方法都是由一组运动方程进行积分, 然后在边界上判断是否符合各物理量的约束条件, 从而得到地球本征模。提出了一个新的解算此问题的方法, 即用 Galerkin 方法计算本征模和本征函数, 相应的边界条件用 Tau 方法处理。结果表明: 在研究地球自由振荡时, Galerkin 方法是一种行之有效的方法; 随着所采用的地球模型的逐步完善, 计算的结果也与观测更加符合。对于三层地球模型, 考虑地球自转的结果比不考虑自转的有所改善, 但其改善效果不如仅将地幔更细致分层对结果的改善显著。

关键词: 天文地球动力学; 地球本征模; 自由振荡; Galerkin 方法; Tau 方法; 边值问题

中图分类号: P542

文献标识码: A

1 前 言

地球在经历地震时也会产生振动。这种振动只与地球本身的内部属性有关, 是地球的各种本征模的叠加。通常人们将周期短于 1 h 的本征模称为自由振荡, 另外还有周日频段的周日模 (如自由核章动和自由内核章动) 和更长周期的本征模 (如 Chandler 摆动和倾斜模)。研究地球的本征模可以让人类更多地了解地壳及地球内部物质密度分布及流变性质, 是地震学与大时间尺度地球动力学之间联系的窗口。

1863 年 Kelvin 第一次证明地球自由振荡的存在。之后 Love^[1] 在 1911 年计算出最长的振荡周期是 60 min, 这与今天实际观测的 54 min 已经很接近。Matumoto 和 Sato^[2] 在 1954 年

收稿日期: 2008-03-14; **修回日期:** 2008-04-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10773025, 10633030); 中科院方向性项目 (KJCX2-YW-T13); 上海市科委资助课题 (06DZ22101, 06ZR14165)

利用了一个两层的地球模型, 假设地球由一个液核和地幔组成, 计算得到环形场最长的周期为 42.5 min。Takeuchi^[3] 在 1959 年用 Rayleigh-Ritz 方法计算了不同 Legendre 数的周期。之后 Alterman 等人^[4] 系统研究了本征模的计算问题, 把二阶偏微分方程组转换为一阶常微分方程组, 奠定了现代计算机数值求解的基础。Lapwood 和 Usami^[5] 系统论述了计算 SNREI 地球模型的简正模的数值方法。方明 (1991)^[6] 在他的博士论文中更详细研究了地球自由振荡问题。但自 20 世纪 90 年代后, 地球自由振荡的研究就渐渐趋少了。

现今应用的方法, 都是建立在 Alterman 等人^[4] 方法的基础上: 首先把二阶的偏微分方程组转换成一阶的常微分方程组, 然后给定初值, 对常微分方程组进行积分, 然后在边界上判断本征模。而我们应用了另一种方法即 Galerkin 方法来求解本征模问题。Galerkin 方法是解决线性微分方程的一种重要方法, 是有限元方法的重要组成部分。Seyed-Mahmoud^[7] 就曾用 Galerkin 方法研究了带液核的地球的章动问题。本文应用 Galerkin 方法对不同的地球模型 (从一层到十二层、从不考虑自转到考虑自转) 的本征模进行了计算, 并对结果进行了讨论。

2 用 Galerkin 方法研究地球的自由振荡

2.1 基本方程和边界条件

以流体静平衡态作为初始应力状态, 在考虑自转、自引力及预应力等条件下, 弹性地球的运动方程为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla V_1 + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_0) - \mathbf{g}_0(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (1)$$

其中, \mathbf{u} 是位移场, $\boldsymbol{\Omega}$ 是地球自转角速度矢量, V_1 是由于质点弹性位移造成质量重新分布产生的附加势。 \mathbf{g}_0, ρ_0 分别是流体静平衡态时地球的重力加速度和密度。对各向同性的弹性体, 其中的应力 \mathbf{T} 为

$$\mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2)$$

其中, λ, μ 为拉梅参量。泊松方程为

$$\nabla^2 V_1 = 4\pi G \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \quad (3)$$

由于扁率的影响只有 1/300, 与其他量相比是个微量, 所以本文研究的是一个简化的球对称模型, 所有讨论均在球坐标中进行, 把球面上的矢量场较方便地表示成球形场和环形场。

将球面上的标量场 V_1 表示为

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} V_{1nm}(r) y_{nm}(\theta, \phi) \quad (4)$$

其中, y_{nm} 是球谐函数, θ, ϕ 为球面坐标。球面上位移矢量场 \mathbf{u} 可以表示成 3 个标量场 U, V, W 的组合:

$$\mathbf{u} = rU + \nabla_1 V - \mathbf{r} \times \nabla_1 W \quad (5)$$

其中, $rU + \nabla_1 V$ 称为球形场, $-r \times \nabla_1 W$ 称为环形场, ∇_1 为单位球上的球面梯度, 即

$$\nabla_1 = \theta \partial_\theta + \phi \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \quad (6)$$

为了方便, 定义归一化的实球谐函数单位矢量:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{nm} = r y_{nm} \\ \mathbf{B}_{nm} = \frac{\nabla_1 y_{nm}}{\sqrt{n(n+1)}} \\ \mathbf{C}_{nm} = \frac{-r \times \nabla_1 y_{nm}}{\sqrt{n(n+1)}} \end{cases} \quad (7)$$

那么 \mathbf{u} 可以表示为

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{nm} \mathbf{P}_{nm} + V_{nm} \mathbf{B}_{nm} + W_{nm} \mathbf{C}_{nm} \quad (8)$$

在不可滑边界(固-固界面)上的条件为 $\{\mathbf{u}\}^\pm = 0$, 在无摩擦可滑边界(固-液界面)上的条件为 $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\}^\pm = 0$ 。应力在两种边界上的条件均为 $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\}^\pm = 0$ 。引力位在两种边界上的条件为 $\{V_1\}^\pm = 0$ 和 $\{\mathbf{n} \cdot [\nabla V_1 - 4\pi G \rho_0 \mathbf{u}]\}^\pm = 0$ 。

2.2 Galerkin 方法简介

Galerkin 方法的基本思路是先把解表示成解空间上一组正交基的线性组合, 然后用不同的基底去卷积, 来定出各基前面的系数^[8]。

例如求解线性微分方程:

$$L[x] = f \quad (9)$$

其中, L 是线性微分算子, x 是待解函数, f 是任意函数。首先把 x 表示为 $x = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i$, a_i 是 $(N+1)$ 个待解的未知常数, ϕ_i 是解空间上的一组 $(N+1)$ 个正交基函数。通过解算下面 $(N+1)$ 个方程

$$\int \phi_j^* \left\{ L \left[\sum_{i=0}^N a_i \phi_i \right] - f \right\} dv = 0 \quad (j = 0, \dots, N) \quad (10)$$

来确定 $(N+1)$ 个系数 a_i , 从而计算 x 。上式中 ϕ_j^* 是 ϕ_j 的共轭, 积分是对全球做体积分。

在本文解决地球本征模问题时, 采用了 Tau 方法来处理边界条件。Tau 方法是解决带边界条件的微分方程的一种常用方法。假如有 M 个边界条件 $B_k u = g_k (k = 1, 2, 3, \dots, M)$, 其中 B_k 是线性边界算子, 则可将式 (10) 改写成下述 $(N+M+1)$ 个方程

$$\begin{cases} \int \phi_j^* \left\{ L \left[\sum_{i=0}^{N+M} a_i \phi_i \right] - f \right\} dv = 0 & (j = 0, \dots, N); \\ \int \phi_j^* \left\{ B_k \left[\sum_{i=0}^{N+M} a_i \phi_i \right] - g_k \right\} dv = 0 & (j = N+1, \dots, N+M; k = 1, \dots, M). \end{cases} \quad (11)$$

通过求解 $(N + M + 1)$ 个系数 a_i , 可以求出满足上述 M 个边界条件的偏微分方程的解。

2.3 Galerkin 方法的具体应用

下面以计算无旋转的一层固体地球的环形场的本征模为例, 来说明怎样应用 Galerkin 方法到实际计算中。对环形场, 按上述积分后, 由于实球谐函数单位矢量的正交性, 积分中有关附加引力位 V_1 的梯度项就消失了, 因此可以不考虑冗余的泊松方程。因为研究的是周期性自由振荡问题, 所以可以假设位移场关于时间 t 的依赖方式为 $\mathbf{u}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, 其中 ω 为振荡频率。则式 (1) 可写为

$$\omega^2 \mathbf{u} + \nabla V_1 + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_0) - \mathbf{g}_0(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (12)$$

由于无旋转且球对称, 所以球形项与环形项之间没有耦合, 不同的阶、次之间也没有耦合。设 n 阶 (degree) m 次 (order) 环形场的解为

$$\mathbf{u}_{nm}^T = \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n W_{nm}^k \phi_k(r) \mathbf{C}_{nm} \quad (13)$$

其中, $\phi_k(r)$ 是函数空间上的一组基。经过试验, 本文采用的是切比雪夫多项式。把环形场的解代入式 (12), 两边点乘以 $\phi_l^*(r) \mathbf{C}_{ij}^*$, 在球体上积分之:

$$\int \int \int \phi_l^*(r) \mathbf{C}_{ij}^* \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \omega^2 \mathbf{u}_{nm}^T + \nabla V_1 + \nabla(\mathbf{u}_{nm}^T \cdot \mathbf{g}_0) - \mathbf{g}_0(\nabla \cdot \mathbf{u}_{nm}^T) + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}_{nm}^T) \mathbf{I} + \mu \nabla \mathbf{u}_{nm}^T + \mu(\nabla \mathbf{u}_{nm}^T)^T] \right\} dv = 0 \quad (14)$$

以 2 阶的环形场为例, 即取 $n = 2$, 利用实球谐函数单位矢量的正交性, 则 $i = 2, j = m$ 。化简式 (14) 后得到

$$\int_0^R \phi_l^* \sum_{k=0}^N \left\{ \rho_0 \omega^2 W_k \phi_k + \frac{\partial \mu}{\partial r} W_k \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + \mu W_k \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial r^2} - \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{W_k \phi_k}{r} - 6 \frac{\mu W_k \phi_k}{r^2} + 2 \frac{\mu W_k}{r} \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \right\} dr = 0 \quad (15)$$

其中 W_k 是 W_{2m}^k 的简写, 积分变成沿半径方向从地心 ($r = 0$) 到外表 ($r = R$) 的一维积分。

下面讨论边界条件。首先, 在地心处 ($r = 0$) 物理量正则 (regular), 要求 $\sum_{k=0}^N W_k \phi_k$ 不含常数项和关于半径 r 的一次项。假设 $\sum_{k=0}^N W_k \phi_k$ 展开成 r 的幂函数多项式的形式如下:

$$\sum_{k=0}^N W_k \phi_k = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_N r^N \quad (16)$$

则地心处的正则条件要求 $a_0 = 0$ 和 $a_1 = 0$ 。

另外, 在自由的外边界 ($r = R$) 上的条件是 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$, 即

$$\int \int \phi_l^*(r) \mathbf{C}_{ij}^* \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \mathbf{n} \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}_{nm}^T) \mathbf{I} + \mu \nabla \mathbf{u}_{nm}^T + \mu (\nabla \mathbf{u}_{nm}^T)^T] ds = 0 \quad (17)$$

化简后得

$$\phi_l^* \sum_{k=0}^N \left\{ k \frac{\partial \phi_k}{\partial r} - \frac{W_k \phi_k}{r} \right\} = 0, \quad r = R \quad (18)$$

把式 (15) 和式 (16)、(18) 联立, 组成方程组。解算这个代数方程组, 求出 W_k 就可以解出对应的环形场。但这里是不能直接解出 W_k 的, 因为这里是求本征值问题, 所要求的是本征频率 ω 。在形成方程组的法矩阵后, 在一个范围内搜索 ω , 使得矩阵的条件数极大 (使行列式的值趋近于零, 即意味着 ω 是本征值)。这里在作矩阵运算时, 应用的方法是奇异值分解 (SVD)。求出本征值 ω 后, 将 ω 代入方程组, 去掉一行和一列后, 就可求出系数 W_k 。这里分别确定行和列的序数的原则是使去掉相应的行和列后矩阵的条件数可达到最小。具体实施时, 行和列数是同时选择的, 而不是选完行再选列。把选出来的列的系数赋值为 1, 则整个方程组可求解, 解出系数 W_k , 本征函数也就求出来了。

球形场的做法与此类似, 多层模型的处理将更加复杂。

3 不同地球模型的计算结果

本文计算采用的是初步参考地球模型 (Preliminary Reference Earth Model, PREM^[12])。下面由简单到复杂针对四种模型分别进行讨论。

3.1 SNREI 一层固体地球模型的本征函数

首先我们计算的是一个单层的 SNREI 地球模型, 即球对称、无自转、完全弹性、各向同性的地球模型。在固体中, 对于周期小于 1 h 的自由振荡来说, 运动方程中的 Coriolis 力 $2\boldsymbol{\Omega} \times \partial \mathbf{u} / \partial t$ 相对于 $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ 是微小量, 故在本节中省略。本节只考虑一层固体地球模型, 采用 PREM 模型中地球固体内核的参数:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 1221.5 \text{ km} \\ \rho_0 = 13.0885 \times 10^{12} - 2.17742 \times 10^5 r^2 \text{ kg/m}^3 \\ -\mathbf{g}_0 = 7.30667 \times 10^{-9} + 0.00366 \times 10^{-3} r + 9.3751 \times 10^{-14} \times r^2 - \\ \quad 3.66053 \times 10^{-14} r^3 \text{ km/s}^{-2} \\ \beta = 3.6678 - 1.0957 \times 10^{-7} r^2 \text{ km/s} \\ \alpha = 15.3891 - 8.34735 \times 10^{-4} r + 1.36098 \times 10^{-7} r^2 - 9.86633 \times 10^{12} r^3 \text{ km/s} \end{array} \right. \quad (19)$$

其中 α 为压缩波速度, β 为稳定系数。则拉梅参量的导出公式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \rho_0 \beta^2 \\ \lambda = \rho_0 \alpha^2 - 2\mu \end{array} \right. \quad (20)$$

在地心处要求各有关物理量正则, 外表面则为自由边界条件。

计算结果见图 1。可以看出环形场的本征函数 (即位移场的相应分量) 的零点数 (除了原点) 是与它的谐频数一致的。基频时一个零点, 1、2、3 次谐频分别有 2、3、4 个零点。这个结果与理论预期是一致的。在 3.2 节中采用 SNREI 三层地球模型的实际计算表明, 对环形场而言, 零点数与谐频数的关系以及本征函数的特征仍一致。

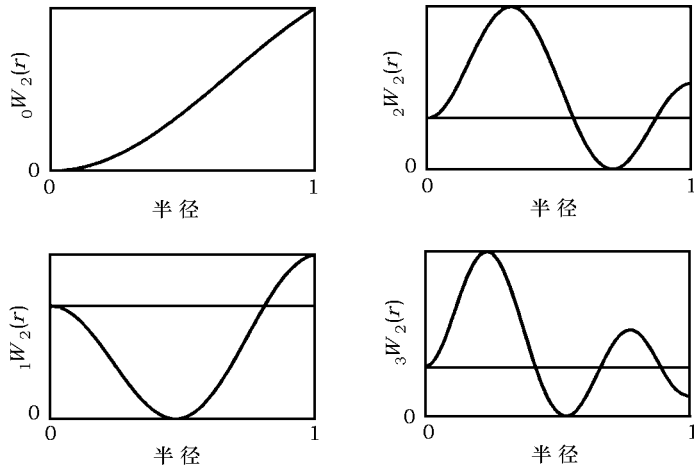


图 1 2 阶环形场 W_2 各谐频 kW_2 随归一化后的半径 (r/R) 的变化

环形场的本征函数的特点是本征函数的零点数 (除原点外) 与它的谐频数 $k(k=0, 1, 2, 3)$ 一致

图 2 是球形场 U_2 、 V_2 的本征函数, 与文献 [5] 用传统积分方法所得的结果一致。

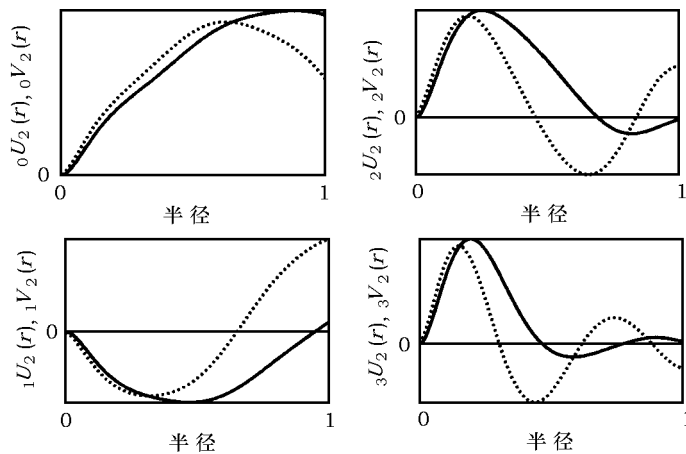


图 2 2 阶球形场 U_2 、 V_2 各谐频 kU_2 、 kV_2 随归一化后的半径 (r/R) 的变化

其中实线为 kU_2 , 虚线为 kV_2

3.2 SNREI 三层地球模型的本征频率

在 3.1 节基础上改进地球模型, 本节采用三层地球模型 (包括固体内核、液体外核和固体地幔) 来模拟真实的地球。在液核中, 等熵、无粘性、忽略自转的线性运动方程为

$$\rho_0 \omega^2 \mathbf{u} - \nabla p_1 + \rho_0 \nabla V_1 + \rho_1 \mathbf{g}_0 = 0 \quad (21)$$

其中, ρ_1 为扰动密度:

$$\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \quad (22)$$

p_1 为扰动压强:

$$p_1 = -\mathbf{u} \cdot \nabla p_0 + \alpha^2 \rho_1 + \alpha^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_0 \quad (23)$$

以上几个公式可以参见文献 [9]。计算所得的本征周期与观测结果符合较好, 见表 1。

表 1 SNREI 三层地球模型的本征频率

本 征 模		环形场的本征周期 /min		球形场的本征周期 /min	
阶数	谐频数	计算结果	观测结果 [5]	计算结果	观测结果 [5]
2	0	45.65	44.01	51.96	53.89
	1	13.07	12.61	25.38	24.51
3	0	29.65	28.43	35.30	35.56
	1	11.89	11.59	18.48	17.68

3.3 SNREI 十二层地球模型的本征频率

地幔和地壳中有很多物理化学性质相差较大的层, 为了使计算结果更加接近真实的地球, 本节按照 PREM 的做法, 将又把地幔和地壳划分成十层, 与固体内核、液体外核一起得到 SNREI 十二层地球模型。这个十二层地球模型的结果明显好于三层模型的结果, 此处只列出了球形场的结果, 见表 2。

表 2 SNREI 十二层地球模型的本征频率

本 征 模		环形场的本征周期 /min		球形场的本征周期 /min	
阶数	谐频数	计算结果	观测结果 [5]	计算结果	观测结果 [5]
2	0	43.56	44.01	53.47	53.89
	1	12.52	12.61	24.18	24.51
3	0	28.17	28.43	35.31	35.56
	1	11.48	11.59	17.54	17.68

3.4 旋转地球的本征频率

本节继续改进地球模型, 考虑自转的因素, 加入科氏力。这造成了球形项 S_n^m 与环形项 $T_{n\pm 1}^m$ 之间的耦合, 使得方程增多, 求解时更加复杂。为此这里只考虑一个三层的地球模型 (见 3.2 节)。为了处理耦合, 方程中的有关量截断到一阶, 为了研究球形场, 本节将位移场按下式展开并截断:

$$\mathbf{u} = T_{n-1}^m + S_n^m + T_{n+1}^m \quad (24)$$

由于耦合, 产生了本征频率的分裂, 本征频率的勒让德数就是它分裂的个数。下表 3 列出的是 2 阶和 3 阶、0 次、谐频数为 0 的球形场本征频率。

表 3 考虑地球自转的三层地球模型的本征频率

基频的本征模 阶数 (n)	球形场的本征周期 /min	
	计算结果	观测结果 ^[5]
2	52.13	53.89
3	35.32	35.36

与表 1 比较显示, 考虑地球自转比不考虑地球自转的三层地球模型的结果有所改善, 但仍不如将地幔分层后对结果的改进效果显著。

4 小 结

本文尝试用 Galerkin 方法对不同的地球模型计算本征模和本征函数, 计算时相应的边界条件用 Tau 方法处理。计算表明, Galerkin 方法可以为研究地球自由振荡提供一种新的选择。随着所采用的地球模型的逐步完善, 计算的结果也与观测更加符合。考虑地球自转比不考虑地球自转的三层地球模型的结果有所改善, 但仍不如将地幔更精细分层对结果的改进效果显著。当然在考虑地球旋转的模型计算中, 也存在产生的矩阵太大, 对求本征值产生不利的影 响。另外, 在求解本征模的过程中, 本文还尝试了求解周日模 (如自由核章动), 结果都很好, 将会在后续文章中再作详细的介绍。

参考文献:

- [1] Love A E H. *Some Problems of Geodynamics*. Camb. Uni. Press, 1911
- [2] Matumoto T and Sato Y. *Bull. Earthq. Res. Inst.* 1954, 32: 247
- [3] Takeuchi H. *Geophys. J.* 1959, 2: 89
- [4] Alterman Z, Jarosch H, Pekeris C L. *Proc. Roy. Soc. A* 1959, 252: 80
- [5] Lapwood E R and Usami T. *Free Oscillation Of The Earth*. Camb. Uni. Press, 1981
- [6] 方明. 地球自由振荡 (博士论文). 中国科学院测量与地球物理研究所, 1991
- [7] Seyed-Mahmoud B. *Wobble/Nutation Of A Rotating Ellipsoidal Earth With Liquid Outer Core*, Master Thesis. Memorial University of Newfoundland, 1994
- [8] 李荣华. 边值问题的 Galerkin 有限元法. 北京: 科学出版社, 2005
- [9] Rochester M G. *Normal Modes of Rotating Self-Gravitating Compressible Stratified Fluid Bodies: the Subseismic Wave Equations*. In: *Graham G A C, Malik S K. eds. Continuum Mechanics and its applications*. Hemisphere: Washington D C, 1989: 797
- [10] 郭俊义. 地球物理学基础. 北京: 测绘出版社, 2001
- [11] Dziewonski A M, Anderson D L. Preliminary reference earth model. *Phys. Earth. Planet. Int.* 1981, 25: 297
- [12] Rochester M G. *Rotational Dynamics of the deformable Earth* (上海天文台讲义). 2006
- [13] Dahlen F A, Tromp J. *Theoretical global seismology*. Princeton: Princeton University Press, 1998

Study of the Earth's Eigen Mode by Galerkin Method

ZHANG Mian^{1,2}, HUANG Cheng-li¹

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 2. The Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: The study of the Earth's eigen mode is an important way to study physical properties and dynamics in the Earth's interior, and is closely related with geophysics and seismology closely. The Earth's eigen mode is usually solved by classical numerical integration of partial differential equations of motion and boundary conditions. Galerkin method is used in this paper to calculate eigen-periods and eigen-functions of free oscillations of different earth models, while boundary conditions are treated with Tau method. Results show that Galerkin method is an alternative tool for such study. At first Earth models are assumed to be spherical non-rotating elastic isotropic (SNREI). The eigen modes for the free inner core is calculated separately with respect to the other two modes: the 3-layer earth mode including solid inner core, fluid outer core and solid mantle (plus crust), and the 12-layer earth mode in which the mantle (+crust) is separated to 10 layers. Furthermore, the eigen modes of rotating free inner core and 3-layer earth model are calculated respectively. The results are improved and approach more closely to the observation with more realized earth model. For 3-layer Earth, incorporating earth rotation will improve the result of the eigen periods comparing with non-rotating earth model, for example, the difference of the eigen period of ${}_0S_2$ with observed one is improved from 3.6% to 3.1%; however, the improvement by separating the mantle to 10 layers is more remarkably than by introducing earth rotation: changing the earth model from 3 layers to 12 layers (both non-rotating), the difference of the eigen periods with observed ones are reduced significantly from 4.3% (maximum, or 3.6% for ${}_0S_2$) to less than 1.6% (maximum, or 0.78% for ${}_0S_2$).

Key words: Astro-geodynamics; eigen mode; free oscillation; Galerkin method; Tau method; boundary problem