第 22 卷 第 1 期
2004 年 3 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol.22, No.1
Mar., 2004

文章编号: 1000-8349(2004)01-0045-12

现代天王星卫星运动定量理论的研究和发展

沈凯先 [1,2]，乔荣川 [1,2]，刘建荣 [1,2]
(1. 中国科学院 国家授时中心, 西安 710600； 2. 中国科学院 联合光学实验室, 北京 100012)

摘要: 1986 年“旅行者 2 号”飞越天王星期间, 由空间无线电和光学观测获得的卫星资料首次给出天王星 5 颗主要卫星质量的可靠估计, 从而推动了现代天王星卫星运动定量理论的建立。 Laskar 于 1986 年建立了第一个相对完整的天王星主要卫星的 (半) 分析理论 —— GUST86，其高精度已被许多学者的实算证实. 之后, 对理论的改进作出贡献的学者有: Malhotra 等人 (1989)、Lazzaro 等人 (1987, 1991) 分析研究了天王星卫星系统中近共振项对长期摄动解的影响; Taylor (1998) 采用数值积分拟合观测资料, 以更精确地测定卫星质量; Christou 和 Murray (1997) 则将一个 2 阶 Laplace-Lagrange 理论应用于天王星卫星系统。对这些学者的工作作一概述。

关 键 词: 天体力学; 天王星卫星; 综述; 行星和卫星
中图分类号: P139； P185.18 **文献标识码**: A

1 引 言

在太阳系的卫星系统中, 天王星卫星系统的运动理论要远比其他大行星卫星系统简单, 且具有唯一的动力学特征。这是因为: (1) 在天王星 5 颗主要卫星中, 除 Miranda 质量偏小 ($< 10^{-6}$，相对主星质量) 和倾角偏大 (约 4.2°) 外, 其余卫星的质量都在 10^{-5} 量级, 且偏心率 e 和倾角 i 也足够小, 一般都在 10^{-3} 量级。这样, 2 阶摄动的影响一般很小; (2) 天王星卫星间没有像土卫和木卫系统中那样存在严格意义上的共振运动, 导致摄动长期解在卫星系统的摄动运动中占支配地位; (3) 天王星的 $J_2(R/a)^2$ 可与 m/M 相比较。天王星卫星运动的这些特征为研究长期摄动理论提供了一个理想的实物背景。

20 世纪 80 年代中期以前, 天王星卫星的理论模型仍然相当简单, 实际上主要只是一个仅包含 Laplace 项 ($\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$) 的进动椭圆模型 [1~4]。虽然这一模型在早期的理论归算中给出了相当好的近似轨道, 但随着航天探测的发展以及新的观测手段 (特别是 CCD 技术) 和新的观测归算处理方法的广泛采用, 观测精度大幅度提高, 理论精度已远不能满足实际的需要。Dermott 和 Nicholson [5] 指出, 先前的简单动力学模型导致卫星质量测定存在严重误差, 特别是内卫星, 测定值比实际质量几乎大了一倍。为此, 他们给出了新的长期摄动解, 并提出

收稿日期: 2002-10-18； **修回日期**: 2003-08-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10273015)

更准确测定卫星质量的必要。 1986 年 1 月“旅行者 2 号 (Voyager 2) ” 成功飞越天王星，期间获得相当数量的高精度观测数据，这一航天成就为更可靠测定天王星及其卫星系统的质量等重要参数，以及对运动理论的深入研究提供了基础。 Laskar [6] 发表了一个天王星主要卫星的运动分析理论 —— GUST86 (General Uranian Satellite Theory)，它包括了很多长周期项 (也称为长期项) 和短周期项，这是第一个相对完整的现代天王星卫星 (半) 分析理论。目前，这个理论的高精度已得到公认，并在各种实测归算中被广泛采用。

继 GUST86 之后， Malhotra 等人 [7] 分析推导了在天王星卫星系统中两个近共振 (near-resonance) 项 —— Umbriel-Titania (U-T) 和 Titania-Oberon (T-O) 项对长期解特征频率的影响，从而对 Laskar 在拟合观测资料时在计算的特征频率上加的经验改正给出了分析解释。此外， Lazzaro 等人 [8,9] 、 Christou 和 Murray [10] 、 Taylor [11] 等出色的工作也都推动了天卫理论的进一步完善。 1986 以来，采用 CCD 新技术获得的观测相继发表，如： Jones 等人 [12] 、 Veiga 和 Vieira [13] 、 Shen 等人 [14] 的观测均比照相观测有更高的精度。理论和观测的进展大大推动了天王星卫星系统的定量研究工作，从而也为满足未来太阳系航天探测的需要奠定了坚实的基础。

本文首先介绍天王星卫星现代分析理论 GUST86，第 2 节叙述该理论的长周期解和短周期解，并以实测计算结果分析 GUST86 的精度。第 3 、 4 节介绍几位学者的改进理论，由 1 阶直到 2 阶。第 5 节介绍 Taylor [11] 在采用数值积分拟合实测作叠代改进后，给出的一些重要基本参数的最新测定。

2 GUST86 —— 第一个现代天王星卫星运动分析理论

在“旅行者 2 号”飞越天王星之前不久， Laskar [6] 发表了 GUST86。这个理论包括了所有长 (周) 期项和相当数量的短周期项，其相关的一些重要参数由拟合一个 12 yr 的短时期数值积分确定。

之后， Laskar 和 Jacobson [15] 采用 1911~1986 年期间所有可得的地面、“旅行者 2 号”的空间无线电多普勒和光学观测资料来拟合 GUST86，归算给出了轨道周期、摄动项振幅和位相的最佳估计。这个理论的建立奠定了现代天王星卫星运动分析理论的基础，尽管后来的一些学者对 GUST86 作了不少改进，但理论的基本框架仍然没变。

2.1 变量和运动方程

在 GUST86 中， Laskar 使用的是 Duriez [16,17] 在他的大行星运动理论中采用的一套变量 $(p,q,z,\zeta,\bar{z},\bar{\zeta})$，它们与经典吻切轨道根数的关系为

$$a=A(1+p)^{-2/3}\Leftrightarrow n=N(1+p)\ ,\quad \lambda=Nt-\sqrt{-1}q=\int n\mathrm{d}t+\varepsilon\ ,$$

$$z=e\exp\sqrt{-1}\omega\ ,\qquad\qquad \zeta=\sin\frac{i}{2}\exp\sqrt{-1}\Omega\ ,$$

$\bar{z}$、$\bar{\zeta}$ 为 z、ζ 的共轭。式中 N 为观测的平运动 (observed mean motion)， A 、 N 满足 Kepler 等式 $N^2A^3=n^2a^3=GM_{\mathrm{U}}(1+m/M_{\mathrm{U}})$。这组变量的优点是便于泊松级数表示为复指数变量。这样，在由计算机推导公式时，可利用所谓的“棣美弗等式 (de Moivre identity) ” 直接替代

sin 、 cos 运算，大大简化推导过程。这套变量目前已广泛见之于国外行星和卫星理论的论文中，特别是法国学者偏好采用它们。 Laskar 由经典的行星 Lagrange 方程给出这组变量的摄动运动方程：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{-3\sqrt{-1}}{NA^2}(1+p)^{4/3}\frac{\partial R}{\partial q} , \\
\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{-1}Np + \frac{\sqrt{-1}(1+p)^{1/3}}{NA^2}\left[3(1+p)\frac{\partial R}{\partial p} + \varphi\psi\left(z\frac{\partial R}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\right) + \right. \\
&\qquad \left. \frac{1}{2\varphi}\left(\zeta\frac{\partial R}{\partial \zeta} + \overline{\zeta}\frac{\partial R}{\partial \overline{\zeta}}\right)\right] , \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{-1}(1+p)^{1/3}}{NA^2}\left[2\psi\frac{\partial R}{\partial \overline{z}} - \varphi\psi z\frac{\partial R}{\partial q} + \frac{z}{2\varphi}\left(\zeta\frac{\partial R}{\partial \zeta} + \overline{\zeta}\frac{\partial R}{\partial \overline{\zeta}}\right)\right] , \\
\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{-1}(1+p)^{1/3}}{2\varphi NA^2}\left[\frac{\partial R}{\partial \overline{\zeta}} - \zeta\frac{\partial R}{\partial q} + \zeta\left(-z\frac{\partial R}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\right)\right] .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中 R 为摄动函数： $R = \sum_{j\neq i} Gm_j(1/\Delta_{ij} - r_i \cdot r_i/r_j^3)$ ， $\varphi = \sqrt{1 - z\overline{z}} = \sqrt{1-e^2}$ ， $\psi = 1/(1+\varphi)$ 。这里 r_i 是天王星至 i 卫星的矢量， Δ_{ij} 是 i 卫星到 j 卫星的距离， R 可展开为泊松级数：

$$
\begin{aligned}
R = &\frac{m'N^2A^2}{M_{\mathrm{sun}}(1+m/M_{\mathrm{sun}})}\sum_{n_{10}}\sum_{j\in Z} C_{n_{10},j}(\alpha)p^g p'^{g'} z^{\overline{n}}\zeta^{\overline{\nu}} z^n \zeta^\nu z'^{\overline{n}'}\zeta'^{\overline{\nu}'} z'^{n'}\zeta'^{\nu'} \exp(kq + k'q' + \\
&\sqrt{-1}(kN + k'N')t) ,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

这里 $n_{10} = (g, g', \overline{n}, \overline{\nu}, n, \nu, \overline{n}', \overline{\nu}', n', \nu') \in N^{10}$ ； $C_{n_{10},j}(\alpha)$ 是实数系数，仅与 α 有关； M_{sun} 是太阳质量； m 为卫星质量。

2.2　摄动函数展开

若将天卫变量 $(p_i, q_i, z_i, \zeta_i, \overline{z}_i, \overline{\zeta}_i)$ ， $i = 1, \cdots, 15$ ，并入一 $6 \times 5 = 30$ 维矢量 $\boldsymbol{V}$ ，则 (1) 式可简化表示为

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \Lambda(\boldsymbol{V}, t) . \tag{3}$$

作变量变换，

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 + \Delta\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}_0, t) , \tag{4}$$

$\Delta\boldsymbol{V}$ 选择使 $\boldsymbol{V}_0$ 成为 $\boldsymbol{V}$ 的自治部分 (只有 $k_i = k_j = 0$ 的项) ，即长期部分，它包含非常长的长周期项 (> 50000 yr) ； $\Delta\boldsymbol{V}$ 含 $k_i \neq k_j \neq 0$ 的项，即为短周期部分。微分 (4) 式可得

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \dot{\boldsymbol{V}}_0 + \frac{\partial\Delta\boldsymbol{V}}{\partial t}(\boldsymbol{V}_0, t) + \frac{\partial\Delta\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{V}_0}(\boldsymbol{V}_0, t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_0}{\mathrm{d}t} + \cdots . \tag{5}$$

(3) 式的右边在 $\boldsymbol{V}_0$ 作泰勒展开，得

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \Lambda(\boldsymbol{V}_0, t) + \frac{\partial\Lambda}{\partial\boldsymbol{V}_0}(\boldsymbol{V}_0, t)\Delta(\boldsymbol{V}_0, t) + \cdots . \tag{6}$$

(5) 和 (6) 式右边展开的详细叙述请参阅文献 [17, 18] 。

2.3 Laplace-Lagrange 长 (周) 期解

Laskar 指出，由于天王星卫星的 e 和 i 都很小 (< 0.05)，质量也小 ($< 10^{-4}$，相对主星)，其摄动函数 R 展开项数可大大减少。第一近似可分别取 (5) 和 (6) 式右边的 1 阶 (相对 m) 1 次 (相对 e 、 i， Laskar [15] 定义 e 、 i 的幂次为次 (degree)) 项，引入算符 $\langle\cdots\rangle$ 表示长期部分； $\{\cdots\}$ 表示周期部分，则有

$$\dot{\boldsymbol{V}}_0 = \langle \Lambda(\boldsymbol{V}_0, t)\rangle \ . \tag{7}$$

(7) 式即是一个线性常系数方程组：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} = \sqrt{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} , \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{A}_1$ 、$\boldsymbol{A}_2$ 是两个 5×5 的常系数特征矩阵。在行星理论中，这即是所谓的 Laplace-Lagrange (以下简称 L-L) 摄动方程。按泊松定理，半长径 α 在 2 阶内没有长期项，长期解摄动方程中不出现 p；因含平黄经 λ 的项都是短周期项， q 也不会出现。 L-L 方程只在 z 和 ζ 的方程中出现。此方程是可积的，当赋予一组初始值后，即可获得一组 L-L 解：

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}^{(i)}\exp[i(g_jt+\beta_j)], \qquad \zeta_i(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{2j}^{(i)}\exp[i(f_it+\gamma_j)] \ , \tag{9}$$

式中 i 为卫星号； g_j 、 f_j 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 的特征频率，它们仅依赖于卫星质量 (m_i) 、天王星形状参数 J_2 和 J_4 以及平均平运动 N；位相 β_j 、 γ_j 和振幅 $A_{1j}^{(i)}$ 、 $A_{2j}^{(i)}$ 由拟合观测或数值积分确定。这个解是天王星卫星完整解的第一近似 [18]，解的周期从几年到几百年，反映了卫星轨道的进动运动。摄动展开的高阶项只会使 g_j 、 f_j 有小的变化。

数值积分可以提供一组比较理想的高精度等间距模拟观测。 Laskar [6] 采用一个 12 yr 数值积分拟合 GUST86，来归算长期项的特征频率 g_j 、f_j，结果发现理论值与由拟合数值积分得到的值有明显的差异，表 1 给出了两组值的比较。表中最后一列是两组值的比 (ration)，这些比值一经确定就被固定，在以后对各种实测资料的拟合归算中不再改变。 GUST86 中，这两组频率值的差被作为经验改正加在理论的特征频率上。 Laskar 把它们归因于尚未考虑的高阶项的影响。

表 1　长期项的频率：理论计算值、数值拟合值以及两者的比率 [6]

频率	理论计算值	数值拟合值	比率
E_1	19.675	20.367	1.035
E_2	6.077	6.352	1.045
E_3	3.398	3.530	1.039
E_4	2.921	3.569	1.222
E_5	0.463	0.305	0.660
I_1	19.679	−20.643	1.049
I_2	−6.141	−6.622	1.078
I_3	−3.453	−3.400	0.985
I_4	−3.019	−3.127	1.036
I_5	−0.241	−0.208	0.864

2.4 短周期解

由 (5) 和 (6) 式可知，1 阶短周期项来自 $\{\Lambda(\boldsymbol{V}_0,t)\}$，2 阶短周期项来自 $\left\{\frac{\partial\Lambda}{\partial\boldsymbol{V}_0}(\boldsymbol{V}_0,t)\Delta\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{V}_0,t)\right\}$，2 阶项一般非常小，只有几个积分后出现小除数的项才可能降阶。

GUST86 包含了约 150 项短周期项，其中 0 次项很容易积分，而 1 次项则需先代入相应变量的长期解然后再积分。GUST86 包括的几个主要短周期项有：

(1) 1 阶 0 次短周期项 (如：$(N_4-N_5)_{\rm Oberon}$)：这些项与一些参数有简单的关系。振幅与摄动卫星的质量成正比，频率和位相均是平均平运动 (N) 和起始点黄经 (λ_0) 的简单组合。在非引力 (如潮汐力、碰撞等) 的作用下这些项不会被衰减，因此有时被称为受迫项 (forced terms)；

(2) 2 阶 0 次短周期项 (如：$(\lambda_1-3\lambda_2+2\lambda_3)_{\rm Miranda}$)：这些项的振幅与两颗卫星质量的乘积 ($m_2m_3$) 成正比；

(3) 1 阶 1 次短周期项 (如：$(2N_4-3N_5+E_5)_{\rm Oberon}$)：这些项是 0 次短周期项与长周期项的乘积，它们与参数的关系相对较复杂。

Laskar 在归算中发现两个近共振卫星对 U-T ($n_{\rm U}/n_{\rm T}=2.1007\approx$ 2:1) 和 T-O ($n_{\rm T}/n_{\rm O}=1.5465\approx$ 3:2) 在 e 和 ω 的摄动项中产生两个大振幅短周期项，它们的周期分别为 86 d (U-T) 和 144.9 d (T-O)。这两个近共振项破坏了标准 L-L 长期解的简单动力学，导致仅由长期项测定卫星质量的不可靠。

2.5 GUST86 的精度

GUST86 与一个 12 yr 数值积分结果比较的最大差从 10 km (Miranda) 到 80 km (Oberon)，表明 GUST86 有很好的内符合精度。Laskar 和 Jacobson [15] 采用空间以及 1911~1986 年期间可得的地面观测资料 (除少量早期的目视测微观测外都是照相观测) 作综合归算，完成了完整 GUST86 的建立，得到卫星位置标准差是：$\sigma_\alpha=0.142''(4122)$，$\sigma_\delta=0.131''(4121)$，括号内为归算的观测数。以此实测归算估计，归算 10 yr 的精度约为 100 km 到 200 km，归算 100 yr 的精度也仅略变差些。20 世纪 80 年代以来，由于新技术 (如 CCD) 的采用，观测的精度已比照相观测明显提高。特别是近年，Jones 等人 [12]、Veiga 和 Vieira [13]、Shen 等人 [14] 先后发表了一批高质量的天王星卫星 CCD 观测结果，Shen 等人还采用 GUST86 和由数值积分 (主要参数取自 Taylor [11] 和 French 等人 [19] 给出的值) 归算给出的理论值分别拟合 1995~1997 年期间的 CCD 观测资料。表 2 给出天王星 4 颗主要卫星相对于 Oberon 的 CCD 观测在极坐标中的两个分量 $P.A.$ (Position Angle) 和 ρ (Separation) 的标准差，其中 σ'' 是相对残差 (O-C)

表 2　分别由 GUST86 和数值积分归算的天王星各卫星对的 CCD 观测 O-C (相对 (O-C) 平均值) 的标准偏离 [14]

卫星 - Oberon	Nu	σ'' (GUST86)		σ'' (数值积分)	
		$P.A.$	ρ	$P.A.$	ρ
Ariel	114	0.0361	0.0455	0.0360	0.0447
Umbriel	113	0.0429	0.0464	0.0423	0.0462
Titania	122	0.0424	0.0425	0.0427	0.0411
Miranda	83	0.0796	0.0842	0.0798	0.0836

平均值的标准偏离，Nu 是采用的观测数。从表中可以看出，只有 Miranda 因接近主星难以获得清晰星像，σ 稍大 (0.07″∼0.08″)，其他卫星对的 σ 均在 0.03″∼0.04″。此外，表中给出的数值积分结果与分析理论归算的结果相当一致，实例归算证实 GUST86 确实有相当好的内、外符合精度。目前，这一理论作为最好的分析理论已被广泛应用于实测归算中。

3 GUST86 理论的修正

GUST86 建立以来的 10 多年里，一些新的理论相继发表。Malhotra 等人 [7] 和 Lazzaro 等人 [8,20] 的 1 阶理论都考虑了在天王星卫星间存在的近共振项对长期摄动频率的影响，由此给出了对 GUST86 的修正。实际上，Laskar 在用 GUST86 分别拟合数值积分结果和观测资料时，已由 O-C 的差异发现这些近共振项对长期摄动的影响，但他并未给出分析推导和理论解释，仅采用对特征频率加经验改正来弥补这个差异。Malhotra 等人的工作则完成了对这些经验改正的理论分析和推导。这里，我们对 Malhotra 等人和 Lazzaro 等人的理论作简要介绍，限于篇幅，有些较繁琐的推导过程不予细叙。

3.1 Malhotra 等人的理论

为检验 Dermott 和 Nicholson [5]、Laskar [6] 建立的 1 阶 L-L 长期摄动理论的合理性，Malhotra 等人 [7] 由对一个 4000 yr 的数值积分作傅里叶分析产生了一个“数值系数分析 (Synthetic)”解。这个解的周期、振幅和位相与 L-L 长期解的预报值比较显示：Titania 和 Oberon 的偏心率 e 的特征频率 (g_4、g_5，见表 3) 存在很大差异；而 Umbriel 的相应值 g_3 仅有小的偏差，相应倾角 i 的特征频率值则符合得相当好。Malhotra 等人的研究揭示：偏心率差异几乎完全归因于两个 e 的 1 阶 $(j+1:j)$ 共振型近共振项 (U-T 和 T-O) 对长期解的影响；而相应含有 i 和 Ω 的近共振项只以 2 阶形式出现，它们都非常小，仅由 $(j+2:j)$ 共振项或更高阶型共振项引起，对长期摄动的影响要小得多，因此 i 的特征频率值不出现明显的差异。虽然由偏心率近共振项引起的对长期解特征频率的改正是个 2 阶小量，但积分方程后，改正被小除数 $jn-(j+1)n'$ 的 2 次幂放大。计算表明，这个频率的改正可达 15%，是一个不可忽视的量。

以考虑存在两颗卫星的 1 阶近共振项为例。取椭圆变量 a、λ、p、q、h、k (也称无奇点变量)，其中 $h_i=-e_i\sin\tilde{\omega}$，$k_i=e_i\cos\tilde{\omega}$，$p_i=-I_i\sin\Omega$，$q_i=I_i\cos\Omega$。摄动哈密顿为 $H_{12}=H_{12}^{\rm sec}+H_{12}^{\rm res}$，其中 $H_{12}^{\rm sec}$ 是长期部分，$H_{12}^{\rm res}$ 是共振部分。$H^{\rm res}$ 不含 p、q，加入摄动哈密顿 H 后，对 (p,q) 的解并无影响，但 $\{k,h\}$ 的摄动方程变为

$$\begin{aligned}\dot{h}_i&=-\sum_{j=1}^{2}A_{ij}k_j-n_i\frac{m_i}{M}\frac{a_i}{a_2}C_i\cos\theta\ ,\\ \dot{k}_i&=-\sum_{j=1}^{2}A_{ij}h_j-n_i\frac{m_i}{M}\frac{a_i}{a_2}C_i\sin\theta\ ,\quad j\neq i\ .\end{aligned}\tag{10}$$

这里 $\theta=j\lambda_1-(j+1)\lambda_2$，$C_1$、$C_2$ 是 α 和整数 j 的函数，$\alpha=a_1/a_2$。

上述摄动方程的第二项是近共振项，与强共振情况不同，θ 的特征周期要比长周期短得多，即 $|jn_1-(j+1)n_2|\gg\{g_j,f_j\}$。因此，相对近共振项幅角 θ 的时间尺度 (h,k,p,q) 为慢变化量。近似地，可取 $(h,k,p,q)\approx$ 常量。Malhotra 等人由 $\ddot{\theta}=j\ddot{\lambda}_1-(j+1)\ddot{\lambda}_2$ 推得 $\ddot{\varphi}=-\omega_0^2\sin\varphi$，

其中 φ 与 θ 相差一个常数 (推导过程可详见文献 [7]) 。这是一个单摆运动方程，它的解是已知的。由此， Malhotra 等人采用 Blekhman [21] 曾用以分析动力学系统运动的一种“时间尺度分离法 (separation of timescale technique) ”，对 (10) 式 $\{h, k\}$ 的方程两边求平均，最后仍得到 1 阶常系数线性方程：

$$\dot{h}_i = -\sum_{j-1}^{2}(A_{ij} + \varepsilon A'_{ij})k_j \ , \quad \dot{k}_i = +\sum_{j-1}^{2}(A_{ij} + \varepsilon A'_{ij})h_j \ . \tag{11}$$

式中 $\varepsilon A' \approx n(m/M)^2(n/\omega)^2$ 。可以看到， (11) 式的方程形式与 (8) 式是一致的，仅系数矩阵有一个 2 阶小量的改变。由此可知， (11) 式的解应与 (9) 式完全相同，只是特征矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 、$\boldsymbol{A}_2$ 的特征频率由 g_i 变为 $\tilde{g}_i$ (见表 3) 。这意味着，近共振项的存在并不对长期解的形式产生影响，即不改变长期解的定性性质。 Malhotra 等人为了作评估，采用 Laskar 和 Jacobson 所使用的半长径和卫星质量值重新计算特征频率。表 3 给出经验改正后的特征频率及 Malhotra 等人理论的相应频率值。比较显示：两个特征频率值十分接近。至此， Laskar 采用的经验改正值得到了完满解释。

Malhotra 等人完成了一个新理论，而由该理论拟合地面和“旅行者 2 号”空间观测资料归算得到的质量显然更具有可信度。

表 3　Malhotra 等人、 Lazzaro 等人的特征频率值与 Laskar 和 Jacobson 的计算频率及改正频率值的比较

特征频率	Laskar 和 Jacobson [15]			Malhotra 等人 [7]	比值 2)	Lazzaro 等人 [8,20]
	计算频率 g_i /(°)·yr^{-1}	改正因子 1)	改正频率 /(°)·yr^{-1}	频率 $\tilde{g}_i$ /(°)·yr^{-1}		频率 g' /(°)·yr^{-1}
g_1	19.440	1.033	20.082	20.117	1.002	20.363
g_2	5.944	1.046	6.217	6.186	0.995	6.178
g_3	2.731	1.049	2.865	2.848	0.994	3.861
g_4	1.735	1.198	2.079	2.086	1.003	2.083
g_5	0.383	1.009	0.386	0.410	1.062	0.406
f_1	−19.453	1.044	−20.309	−20.340	1.002	−20.378
f_2	−5.999	1.048	−6.287	−6.239	0.992	−6.244
f_3	−2.706	1.048	−2.836	−2.790	0.984	−2.797
f_4	−1.828	1.008	−1.843	−1.839	0.998	−1.843
f_5	−0.259	1.000	−0.259	−0.269	1.039	−0.275

1) Laskar 和 Jacobson 采用的经验改正值与基于数值积分的理论值之比；

2) Malhotra 等人的特征频率与 Laskar 和 Jacobson 的特征频率之比。由表可以看到 g_5 、f_5 仍需分别作 6% 和 4% 的进一步改正，其余值则都已在理论值的 1% 范围内。

3.2 Lazzaro 等人的理论

Lazzaro 等人 [8] 、 Lazzaro [20] 发表了一个完整的半分析理论。该理论考虑了卫星间的相互摄动、太阳和天王星的引力摄动，并包含两类解：半长径 (α) 和平黄经 (λ) 的半分析解；偏心率 (e) 、近心点幅角 (ω) 和倾角 (i) 、升交点黄经 (Ω) 的分析解。 Lazzaro 解释之所以这样

做，是因为天王星卫星系统的特殊物理条件：对半长径和平黄经，开普勒轨道解就几乎可完全描述它们随时间的变化，其差异仅在一个 2 阶小量的摄动 (3 颗内卫星间的 Laplace 共振项)；而对其他变量 (e, i, ω, Ω)，开普勒轨道解不能以足够精度描述其真实运动轨迹，因为摄动引起这些变量的变化与开普勒轨道有相当大的差异。Lazzaro 认为，对这些变量采用分析解易于分别确定各个摄动的影响。

Lazzaro 等人 [8] 详细分析了太阳摄动对天王星卫星运动的影响。他们在倾角和交点黄经的摄动运动方程中加入了太阳的摄动。完整的理论发表在 Lazzaro 1991 年的论文中 (见文中表 4～表 8，作为比较，表中还给出了 GUST86 的相应值)。结果显示，这个理论与 GUST86 有较好的一致性，最大的差异出现在倾角和升交点黄经上：在 Lazzaro 表中，有两项 GUST86 没有的大振幅太阳摄动项。但这两项幅度相近而符号相反，因此在初始时刻它们是抵消的。只是在长时间间隔里，它们的影响才会变得重要。Lazzaro 的理论直到现在还未与实测拟合，也未见有人采用。不过，由于该理论比 GUST86 和 Malhotra 等人的理论更详细地考虑了太阳摄动，且从表 3 给出的特征频率看，它与其他理论也符合得相当好。因而，这一理论也不失为一个值得研究采用的理论。

4 2 阶理论的发展

Duriez [17] 建立了一个有 4 颗外行星的 2 阶分析理论，其摄动展开到 2 阶 7 次。Laskar [18] 则系统地给出了一套便于推导高阶摄动展开的规则和公式。这些大行星高阶理论被许多学者广泛应用于卫星动力学模型的建立中，如： Vienne 和 Duriez [25,26]、 Laskar [6,27] 等。

Christou 和 Murray [10] 指出，虽然 Malhotra 等人的理论由于加入了 U-T (2:1) 和 T-O (3:2) 两个近共振效应而得到与数值积分相当一致的结果，但大于 1% 的差异仍然存在，他们把这些差异归因于未考虑一些高阶 (弱) 近共振项的影响。为此， Christou 和 Murray 在上述大行星高阶理论的基础上，对天王星卫星运动摄动方程作 2 阶推导。由 2.2 节的 (5) 和 (6) 式可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}_0 = \langle \Lambda(\boldsymbol{V}_0, t)\rangle + \left\langle \frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{V}_0}(\boldsymbol{V}_0, t)\Delta_1 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}_0, t)\right\rangle . \tag{12}$$

上式中 $\Delta_1\boldsymbol{V}$ 是 $\Delta\boldsymbol{V}$ 的 1 阶近似， $\frac{\partial \Delta_1 \boldsymbol{V}}{\partial t}(\boldsymbol{V}_0, t) = \{\Lambda(\boldsymbol{V}_0, t)\}$ 。 (12) 式右边第二项中 $\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{V}_0}(\boldsymbol{V}_0, t)$ 和 $\Delta_1(\boldsymbol{V}_0, t)$ 的乘积项对时间积分会生成线性 2 阶长期解，而 $\Delta_1\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}_0, t)$ 中 (弱) 近共振项与相应项乘积积分后的解因含小除数会导致解降阶。尤其对 q ，方程为 $\frac{\partial \Delta_1 q_i}{\partial t} = \{L_i^{(\sigma)}(q_0, t)\} + iN_i\Delta_1 p_i, i = 1, \cdots, n$, 其中 $L_i^{(\sigma)}$ 是 (1) 式第二个等式右边第二项，$\sigma \in \{p, q, z, \zeta, \bar{z}, \bar{\zeta}\}$ 。 $\Delta_1 q$ 由对 t 双重积分得到，解出现含 $(k_iN_i + k_jN_j)^2$ 小除数项，这些项会对 1 阶甚至 0 阶项作 “贡献”。

Christou 和 Murray 定义所有对摄动影响大于 $0.001°/\mathrm{yr}$ 的近共振项为 “有贡献 (significant)” 项，这些项列于表 4 中。计算 2 阶理论将涉及相当大量的项， Christou 和 Murray 借助了 Laskar [18] 的推导规则和公式，采用已在太阳系动力学研究中广泛应用的计算机代数 (符号) 运算作程序推导来完成这项非常繁琐的工作。改进后的理论能使特征频率的相对误差减小

表 4　对天王星卫星系统 2 阶理论“有贡献”的近共振项 [10]

卫星对	对摄动影响		
	$> 10^{-1}/(°)\cdot\mathrm{yr}^{-1}$	$> 10^{-2}/(°)\cdot\mathrm{yr}^{-1}$	$> 10^{-3}/(°)\cdot\mathrm{yr}^{-1}$
Miranda–Ariel	–	–	2:1, 3:2, 4:2, 4:3
Ariel–Umbriel	–	3:2, 5:3	–
Umbriel–Titania	–	2:1	4:2
Titania–Oberon	3:2	4:3, 5:3, 6:4	3:1~9:7, 5:4~8:7
总计	1	6	14

到 0.5% 以下。

表 5 给出了由数值积分和各种分析理论归算的偏心率 (e) 长期解特征频率的比较。表中以 Malhotra 等人 [7] 的数值积分值为标准，归算出各种理论值的相对误差。很明显， L-L 长期解的相对误差较大，特别是第四个特征频率 (g_4) ，其差达到 $\approx 16\%$ 。此误差主要是受近共振项的影响。表中 “ E. L-L (Extended Laplace-Lagrange 长期解) ” 和 “ Malhotra ” 两列分别为由 Christou 和 Murray [10] 及 Malhotra 等人 [7] 修正近共振项影响后所得的值，其相对误差已大大减小。最后二列则是采用 Christou 和 Murray [10] 的 2 阶理论得到的值，其中最大相对误差已在 0.5% 以下。由表可清楚地看到：随着理论的发展，长期解的精度得以不断改进。

表 5　各种归算 (数值积分和分析理论) 得到的长期解特征频率及其相对误差

卫星	e 特征频率 (eigenfrequency) $/(°)\cdot\mathrm{yr}^{-1}$								
	数值积分 [7]	L-L [10]	相对误差	E. L-L [10]	相对误差	Malhotra 等人 [7]	相对误差	2 阶理论 [10]	相对误差
Miranda	20.299	20.283	−0.01%	20.283	−0.05%	20.289	−0.05%	20.291	−0.05%
Ariel	6.000	5.961	−0.65%	5.962	−0.65%	5.965	−0.60%	5.995	−0.10%
Umbriel	2.909	2.855	−1.85%	2.872	−1.25%	2.874	−1.20%	2.906	−0.10%
Titania	1.924	1.608	−16.50%	1.893	−1.60%	1.874	−2.60%	1.931	−0.35%
Oberon	0.367	0.352	−4.10%	0.365	−0.55%	0.367	0.00%	0.367	0.00%

5　参数的测定

卫星理论一些重要的基本参数，如：大行星和卫星的质量、大行星形状参数 J_2 和 J_4 、起始历元的初值等的测定，对建立高精度分析理论和历表是至关紧要的基础工作。 1986 年“旅行者 2 号”飞近天王星，且曾接近天卫一 (Miranda) ，这期间 (约 3 个半月) 获得的无线电和光学观测精度远高于地面观测，它们为测定、改进大行星和卫星质量等参数提供了良机。

Smith 等人 [22] 、 Tyler 等人 [28] 最早利用空间多普勒跟踪资料 (Doppler-tracking data) 初步测定了天王星主要卫星的质量，他们的结果基本证实了 Dermott 和 Nicholson [5] 的预期结果。新的测定显示： Titania 和 Oberon 的质量比 Veillet [2] 仅采用地面观测资料和简单进动椭圆模型测定的值小很多； Miranda 等人的值则约小一倍；只有 Ariel 和 Umbriel 的质量与先前估计值较接近。在 GUST86 发表之后， Laskar 和 Jacobson [15] 采用“旅行者 2 号”空间观测获得的所有无线电和光学摄像 (star-satellite imaging) 资料以及 1911~1986 年的地面观测资

料进行拟合，归算了天王星及其卫星的质量，并给出一组完整的分析理论动力学参数。

由于数值积分能够比分析理论提供更高精度的卫星历表，因此更多的作者采用由数值积分产生的轨道来拟合实测资料以改进参数。 Jacobson 等人 [23] 综合分析了空间多普勒跟踪和光学资料以及地面观测资料，通过数值积分轨道拟合，叠代改进求解天王星及其卫星的质量，结果得到了更高精度的参数。

最新的测定是由 Taylor [11] 完成的。他收集了 1977 年 4 月 ~1995 年 10 月期间所有发表和未发表的地面观测资料，其中包括相当数量的高质量照相观测、 CCD 观测以及子午环观测，并加入“旅行者 2 号”的光学观测，由数值积分拟合观测资料并作叠代改进，测定出更准确的卫星质量等重要参数。 Taylor 选取上述时间段有几个考虑： (1) 1981 年 1 月“旅行者 2 号”飞越天王星正处于此时间区间内。这样，就可以综合处理“旅行者 2 号”飞越天王星前后的地面观测资料，以及飞越期间 (< 3 个月) 获取的照相资料； (2) 该时间区间覆盖了 Laplace 项的一个半周期； (3) 这个时期的大部分时候，轨道处在极指向视线 (pole-on) 的易观测段，而轨道侧向指向视线 (edge-on) 的不易观测期不在此时间区内。

Taylor采用的数值积分是8阶 Gauss-Jackson 数值法，起始历元为 1987.1.5.0 (JED 2446800.5)，步长取 0.025 d 。摄动计算未包括行星摄动，试算表明忽略它不损失精度。共有 15 个坐标和 570 个偏导数的 2 阶微分方程被数值积分，拟合改进的结果列于表 6 。表中，基本参考面为天王星赤道，起始点为天王星赤道在 B1950 地球赤道面升交点，坐标单位是 AU ，速度单位是 AU/d 。

相对天王星，几颗主要卫星的质量： Miranda 为 $(7.05\pm0.31)\times10^{-7}$ ， Titania 为 $(3.839\pm0.039)\times10^{-5}$ ， Oberon 为 $(3.230\pm0.067)\times10^{-5}$ 。相对太阳，天王星质量为 $(4.36587\pm0.00012)\times10^{-5}$ ，其 J_2 为 0.003365 ± 0.000013 [11] 。

Taylor 在最小二乘叠代改进过程中发现：天王星极的坐标 $(\alpha_{\rm p}, \delta_{\rm p})$ 与轨道参数、 J_4 与 J_2 都有强相关，故它们未参加改进，而是采用 French 等人 [19] 的固定值。此外，卫星 Ariel 和 Umbriel 的质量也存在强相关，因此它们的值也取固定值，取自 Jacobson 等人 [23] 。

表 6 历元 JED 2446800.5 的初始坐标和速度 [11]

	Miranda	Ariel	Umbriel	Titania	Oberon
x	−0.0002671269	0.0009780155	0.0009412372	0.0010065934	−0.0034567062
y	0.0008238160	0.0008178558	−0.0014993458	−0.0027361423	−0.0017933166
z	0.0000649225	−0.0000000196	0.0000017092	−0.0000051470	0.0000039824
$\dot{x}$	−0.0036706600	−0.0020393546	0.0022929337	0.0019769101	0.0008391051
$\dot{y}$	−0.0011794554	0.0024466736	0.0014396889	0.0007243742	−0.0016183260
$\dot{z}$	−0.0000717602	0.0000000966	0.0000022138	0.0000021730	−0.0000048763

表 7 几位主要学者的卫星 GM 测定值的比较 $\mathrm{km^3\cdot s^{-2}}$

卫星	Veillet [1]	Tyler 等人 [28]	Laskar 和 Jacobson [15]	Jacobson 等人 [23]	Taylor [11]
Miranda	11.6	5	4.4	4.4	4.09
Ariel	104.0	90	86.3	90.3*	90.3*
Umbriel	69.4	85	84.0	78.2*	78.2*
Titanian	393.0	232	230.0	235.3	222.4
Oberon	398.8	195	199.9	201.1	187.1

注：“ * ”表示为固定值，取自 French 等人 [19] 。

表 7 给出几位主要学者的 GM 测定值 (G 是引力常数，为 $6.672 \times 10^{-20}\ \mathrm{km^3/kg \cdot s^2}$) 。表中第一列 Veillet 的值是“旅行者 2 号”飞越之前的测定值。由比较看出，卫星质量的测定值在趋于减小。

6 结 束 语

“旅行者 2 号”飞越天王星期间，获得了精度远较其他观测资料高的光学和无线电观测数据，使更精确测定天王星卫星的质量成为可能。而 20 世纪 90 年代以来，地面观测技术也有了很大改进，大量新的 CCD 观测数据的获得为运动理论 (特别是分析理论) 研究取得令人瞩目进展创造了条件。此外，天王星卫星系统具有的动力学特征也为研究长期摄动运动理论提供了一个最理想的研究平台，而长期解理论的研究又对研究太阳系稳定性课题具有特殊意义。因此，近年来，许多国外学者对天王星卫星系统的研究表现出极大的兴趣，给予了特别的关注。本文我们介绍了由 Laskar 建立的现代天王星卫星分析理论 —— GUST86 ，也对其之后的发展和精化作了一简要综述。可以看到，新修正理论的摄动已经考虑到 2 阶，分析解 (特别是长期解) 的精度有了明显改进。

由严格分析方法建立的卫星运动解或模型始终是研究行星或卫星动力学的有力手段，因为，至少原则上可以将卫星的根数表示成系统的基本参数，如：卫星质量 m 、平均平运动 N 和平均半长径 A 的显函数，这便于着手研究参数空间不同区域解的特性。基于此，为建立精密卫星历表，改进分析理论仍然是一个重要的研究方向。进一步精化分析理论有赖于两个方面的努力： (1) e 和 i 的摄动展开考虑到更高阶项，即：不仅包括 e 和 i 的 4 阶长期项，而且也要包括 2 阶近共振项平均后的效应； (2) 更精确测定系统的基本参数，特别是卫星的质量。高精度“旅行者 2 号”空间观测资料的获得大大提高了卫星质量测定的精度和可信度，但“旅行者 2 号”飞越时间较短 ($<$ 6 个月) ，因而，改进地面观测技术，提高地面资料的精度仍然是必不可少的。一个新的“ Voyager mission ”正在计划中，它将发射天王星的环轨 (orbiter) 卫星，更高精度的光学资料有望获得，这必将有利于长期摄动的更精确测定，从而为更好地测定卫星质量提供可能。

参考文献：

[1] Veillet C. These d'Etat, Paris: Universite de Paris, 1983

[2] Veillet C. A&A, 1983, 118: 211

[3] Lazzaro D, Ferraz-Mello S, Veillet R. A&A, 1984, 182: 150

[4] Jacobson R A. JPL Publ., 1985, 85: 79

[5] Dermott S F, Nicholson P D. Nature, 1986, 319: 115

[6] Laskar J. A&A, 1986, 166: 349

[7] Malhotra R, Fox K, Murray C D *et al.* A&A, 1989, 221: 348

[8] Lazzaro D, Ferraz-Mello S, Vieira M R. A&A, 1987, 182: 150

[9] Lazzaro D. In: Vieira M R, Lazzaro D, Sessin W eds. Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects, Rio de Janeiro: Obsevatorio Nacional, 1989

[10] Christou A A, Murray C D. A&A, 1997, 327: 416

[11] Taylor D B. A&A, 1998, 330: 362

[12] Jones D H P, Taylor D B, Williams I P. A&ASS, 1998, 130: 77

[13] Veiga C H, Vieira M R. A&A, 1999, 138: 247
[14] Shen K X, Qiao R C, Harper D et al. A&A, 2002, 391: 775
[15] Laskar J, Jacobson R A. A&A, 1987, 188: 212
[16] Duriez L. A&A, 1977, 54: 93
[17] Duriez L. Premiere These, Lille: de l'Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois, 1975: 1
[18] Laskar J. A&A, 1985, 144: 133
[19] French R G, Elliot J L, French L M et al. Icarus, 1988, 73: 349
[20] Lazzaro D. A&A, 1991, 250: 253
[21] Blekhman I I. In: Ishlinsky A, Cherousko F eds. Advances in Theoretical and Applied Mechanics, Moscow: MIR Publishers, 1981
[22] Smith B A, Soderblom L A, Beebe R et al. Science, 1986, 233: 43
[23] Jacobson R A, Campbell J K, Taylor A H et al. AJ, 1992, 103: 2068
[24] Vienne A, Duriez L. A&A, 1995, 297: 588
[25] Vienne A, Duriez L. A&A, 1991, 246: 619
[26] Vienne A, Duriez L. A&A, 1992, 257: 351
[27] Laskar J. Icarus, 1990, 88: 266
[28] Tyler G L, Eshleman V R, Hinson D P et al. Science, 1986, 233: 79

Study and Development of Contemporary (Quantitative) Theories on the Motion of the Uranian Major Satellites

SHEN Kai-xian[1,2], QIAO Rong-chuan[1,2], LIU Jian-rong[1,2]

(1. Nation Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xian'an 710600, China ; 2. Joint Lab of Optical Astronomy, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China)

Abstract: The data of the satellites acquired by spacecraft-centered radio and optical observations during the Voyager 2 encountering Uranus provide the first reliable estimation of the masses of all five major satellites. Contemporary quantitative theories on the motion of the Uranian satellites have been promoted. Laskar (1986) developed the first relatively complete (semi-) analytical theory (GUST86) with its high accuracy being confirmed by some authors. After that, the contributions of the refinement on the theory should be mentioned Malhotra (1989), Lazzaro (1987, 1991), investigated the effect of the near-resonance on the secular motion of the satellites; Taylor (1998), re-determined the masses of the five major satellites by the theoretical fitting into observations through numerical integration; Christou and Murray (1997) applied a second order Laplace-Lagrange theory to the satellite system. A general survey of how the quantitative theories of motion for the Uranian satellites was set up and developed is presented in the paper.

Key words: celestial mechanics; Uranian satellites; review; planets and satellites